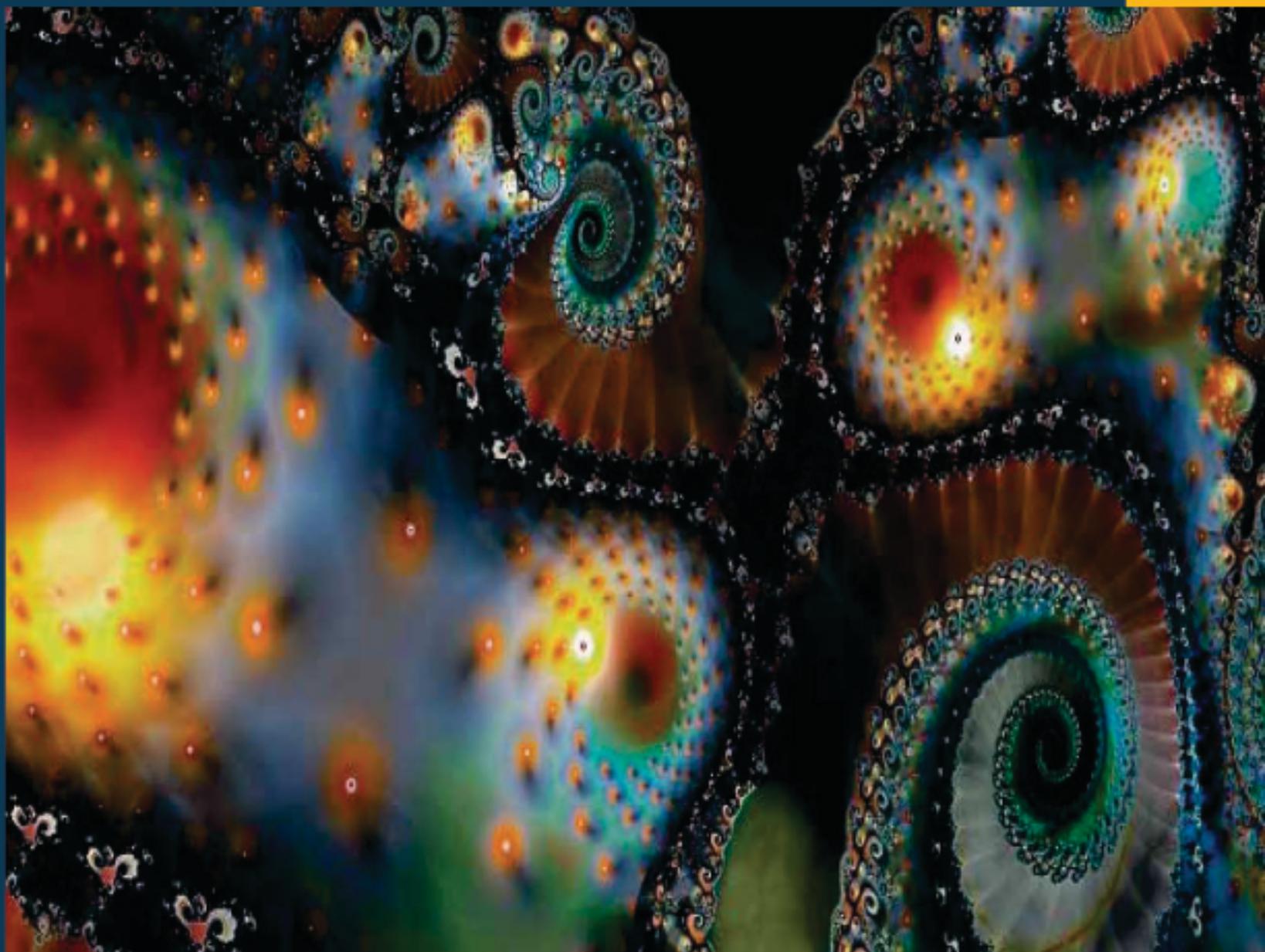


CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES DE MATEMÁTICAS ÁLGEBRA

Elena de Oteyza (Coordinadora)

Conocimientos fundamentales de Matemáticas Álgebra



Elena de Oteyza (Coordinadora)

PEARSON
Educación®

COLECCIÓN CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES



**Conocimientos
Fundamentales de Matemáticas**

Álgebra



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Dr. Juan Ramón de la Fuente
RECTOR

Lic. Enrique del Val Blanco
SECRETARIO GENERAL

Mtro. Daniel Barrera Pérez
SECRETARIO ADMINISTRATIVO

Dra. Rosaura Ruiz Gutiérrez
SECRETARIA DE DESARROLLO INSTITUCIONAL

Mtro. José Antonio Vela Capdevila
SECRETARIO DE SERVICIOS A LA COMUNIDAD

Mtro. Jorge Islas López
ABOGADO GENERAL

Mtra. María de Lourdes Sánchez Obregón
DIRECTORA GENERAL DE LA ESCUELA
NACIONAL PREPARATORIA

Mtro. Rito Terán Olguín
DIRECTOR GENERAL DEL COLEGIO
DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Mtra. Carmen Villatoro Alvaradejo
COORDINADORA DEL CONSEJO ACADÉMICO
DEL BACHILLERATO

Dr. Alejandro Pisanty Baruch
DIRECTOR GENERAL DE SERVICIOS
DE CÓMPUTO ACADÉMICO

Dr. Francisco Cervantes Pérez
COORDINADOR DE UNIVERSIDAD
ABIERTA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA

Lic. Néstor Martínez Cristo
DIRECTOR GENERAL DE COMUNICACIÓN SOCIAL

Colección Conocimientos Fundamentales

Esta colección es parte de un programa de la UNAM orientado a la producción de libros y materiales digitales para el bachillerato.

Colección Conocimientos Fundamentales

Conocimientos Fundamentales de Matemáticas

Álgebra

M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza
(Coordinadora)

M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza
Profesora de la Facultad de Ciencias, UNAM

M. en C. Emma Lam Osnaya
Profesora de la Facultad de Ciencias, UNAM

Dr. Carlos Hernández Garciadiego
Investigador del Instituto de Matemáticas, UNAM

M. en C. Ángel Manuel Carrillo Hoyo
Investigador del Instituto de Matemáticas, UNAM



Universidad Nacional Autónoma de México
México, 2006



México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

DE OTEYZA, ELENA *et al.*
Conocimientos Fundamentales de Matemáticas,
Álgebra

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2006

ISBN: 978-970-26-0958-2

Área: Bachillerato

Formato: 21 × 27 cm

Páginas: 408

Programa Conocimientos Fundamentales para la Enseñanza Media Superior

Coordinación general: Dra. Rosaura Ruiz Gutiérrez y Dr. Arturo Argueta Villamar

Coordinación operativa: Mtro. Alfredo Arnaud Bobadilla

Coordinación editorial: Lic. Consuelo Yerena Capistrán

La Coordinación agradece la colaboración de la Escuela Nacional Preparatoria, el Colegio de Ciencias y Humanidades, el Consejo Académico del Bachillerato, la Facultad de Filosofía y Letras, la Facultad de Ciencias, la Facultad de Química, el Instituto de Ecología, el Instituto de Geografía, el Instituto de Investigaciones Filosóficas, el Instituto de Matemáticas, el Instituto de Física, el Instituto de Investigaciones en Materiales, el Centro de Ciencias Físicas, la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico, la Coordinación de Universidad Abierta y Educación a Distancia, la Dirección General de Actividades Cinematográficas, la Dirección General de Divulgación de la Ciencia, la Dirección General de Televisión Universitaria y la Dirección de Literatura. Se agradece también a la Academia Mexicana de Ciencias.

Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Álgebra

1ª edición, 2006

Colección Conocimientos Fundamentales

D. R. UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Cd. Universitaria, 04510, México, D. F.

Secretaría de Desarrollo Institucional

ISBN 970 32 3840 8

PRIMERA EDICIÓN, 2006

D.R. © 2006 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Atacomulco No. 500 – 5º piso

Col. Industrial Atoto

53519, Naucalpan de Juárez, Edo. de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

ISBN 10: 970-26-0958-5

ISBN 13: 978-970-26-0958-2

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 09 08 07 06



Presentación

El saber, entendido como fuerza que impulsa de manera determinante al desarrollo, tanto individual como social, constituye una condición necesaria para el crecimiento, la democracia, la equidad y la libertad.

En el contexto de la sociedad del conocimiento, la formación media superior se ha convertido en un tema de atención prioritaria para las instituciones educativas. Sus nuevas tendencias, oportunidades y posibilidades, su función de enlace entre los niveles básico y profesional y su situación estratégica en el proceso formativo, dotan al bachillerato de un gran potencial.

El libro que tienes en tus manos es producto de un muy estimable esfuerzo hecho por la Universidad Nacional Autónoma de México para fortalecer al bachillerato. Forma parte de la **Colección Conocimientos Fundamentales** para la enseñanza media superior, concebida bajo la visión de que los acelerados cambios y transformaciones de las últimas décadas en los diversos campos del saber y del quehacer humano, deben reflejarse en los contenidos educativos del siglo que inicia. En tal sentido, este ciclo de estudios está siendo objeto de un profundo análisis.

Entre los aspectos que, sin duda, impulsarán al bachillerato, están su articulación orgánica con las etapas educativas posteriores; el establecimiento de estrategias de atención a requerimientos pedagógicos específicos; la modificación curricular sustentada en el perfil de egreso y en los conocimientos relevantes y pertinentes que requiere el estudiante; el mejoramiento de la docencia, y la incorporación de nuevas tecnologías a la enseñanza-aprendizaje en esta etapa.

Con base en lo anterior, la Secretaría de Desarrollo Institucional, en colaboración con la Escuela Nacional Preparatoria, el Colegio de Ciencias y Humanidades y el Consejo Académico del Bachillerato de la UNAM, ha emprendido un programa conducente a replantear los contenidos temáticos de las disciplinas que se imparten en este nivel de estudios.

Los libros y materiales de la **Colección Conocimientos Fundamentales** para la enseñanza media superior son el punto de partida para establecer los cimientos de una formación que, efectivamente, te proporcione una cultura general interdisciplinaria y de capacidades específicas para que puedas responder a las exigencias de un entorno cada vez más complejo y demandante. Dichos conocimientos, además de las habilidades y valores correspondientes, deben prepararte también para el aprendizaje a lo largo de tu vida.

La Colección cuenta con la participación de destacados académicos de la Universidad, en el marco de un programa institucional destinado a rendir sus mejores frutos en beneficio de los jóvenes del bachillerato en México y en América Latina.

*Dr. Juan Ramón de la Fuente
Rector de la Universidad
Nacional Autónoma de México*

Prefacio

La Secretaría de Desarrollo Institucional, en colaboración con la Escuela Nacional Preparatoria, el Colegio de Ciencias y Humanidades y el Consejo Académico del Bachillerato de la UNAM, emprendió la tarea de reflexionar sobre los contenidos temáticos de las disciplinas que se imparten en el bachillerato, bajo la premisa de que la enseñanza media superior tiene como objetivos principales la formación de estudiantes que continúen sus estudios en la licenciatura y el posgrado, con posibilidades reales de incorporarse a la vida laboral, con un claro compromiso social.

Las disciplinas elegidas para trabajar en una primera etapa fueron: biología, filosofía, física, geografía, matemáticas, literatura y química. Se formaron grupos de trabajo integrados por profesores del bachillerato, la licenciatura y el posgrado, que definieron los conocimientos fundamentales de cada disciplina, en función de su desarrollo reciente, de su pertinencia en el marco de la enseñanza media superior y del impulso a la interdisciplina.

La definición de los conocimientos fundamentales tiene como fin el determinar los saberes básicos e imprescindibles con que los estudiantes deben contar al término del ciclo del bachillerato y proporcionar a los alumnos una cultura general de la disciplina, que les permita estar preparados para incursionar en nuevos espacios del saber.

Una vez establecidos tales conocimientos, se integraron grupos de trabajo más amplios para elaborar los contenidos de los libros, de los discos compactos y de la página web, que son los tres materiales de apoyo a tu formación que incluye este programa. Éstos se insertan en el marco de la **Colección Conocimientos Fundamentales** para que puedas usarlos con la orientación y apoyo de tus profesores.

La definición y la producción de los materiales de esta Colección, contó con la amplia participación de la Escuela Nacional Preparatoria, el Colegio de Ciencias y Humanidades, el Consejo Académico del Bachillerato, la Facultad de Filosofía y Letras, la Facultad de Ciencias, la Facultad de Química, el Instituto de Ecología, el Instituto de Geografía, el Instituto de Investigaciones Filosóficas, el Instituto de Matemáticas, el Instituto de Física, el Instituto de Investigaciones en Materiales, el Centro de Ciencias Físicas, la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico, la Coordinación de Universidad Abierta y Educación a Distancia, la Dirección General de Actividades Cinematográficas, la Dirección General de Divulgación de la Ciencia, la Dirección General de Televisión Universitaria y la Dirección de Literatura. También contribuyó en la tarea un selecto grupo de miembros de la Academia Mexicana de Ciencias, quienes hicieron sugerencias para mejorar los materiales. A todos ellos, nuestro reconocimiento y gratitud.

El Programa de Fortalecimiento del Bachillerato, del que forma parte la **Colección Conocimientos Fundamentales** es una iniciativa de la UNAM destinada a apoyar y fortalecer los estudios de bachillerato en lengua española.

Con esta primera serie de libros y materiales para siete disciplinas, nuestra Universidad inicia esta Colección que habrá de enriquecerse con una serie de nuevos títulos, realizados con la calidad y el profesionalismo propios de nuestra Casa de Estudios. Están dirigidos a los maestros y estudiantes del nivel medio superior.

Dra. Rosaura Ruiz Gutiérrez
Secretaria de Desarrollo Institucional

Índice

Presentación.....	V
Prefacio.....	VII
Módulo 1 El campo de los números reales.....	1
Introducción	2
Los números enteros.....	3
Suma de números enteros.....	4
Ejercicios.....	8
Resta de números enteros	9
Ejercicios.....	11
Multiplicación de números enteros	11
Ejercicios.....	16
El orden en los números enteros	17
Ejercicios.....	19
Factores primos y máximo común divisor	19
Ejercicios.....	22
Los números reales	22
Los números racionales.....	22
Localización en la recta	24
Expresiones decimales.....	26
Suma y producto de número racionales	27
Ejercicios.....	28
Los números reales.....	29
Propiedades de las operaciones en los números reales	30
Agrupamiento	35
Ejercicios.....	38
Números algebraicos y trascendentes	39
Problemas sin solución en los número reales	40
Razones y proporciones.....	40
Ejercicios.....	42
Valor absoluto de un número real	42
Intervalos	44
Ejercicios.....	46
Leyes de los exponentes.....	47
Ejercicios.....	48
Notación científica	49
Ejercicios.....	50
Resumen.....	50
Ejercicios de repaso.....	51

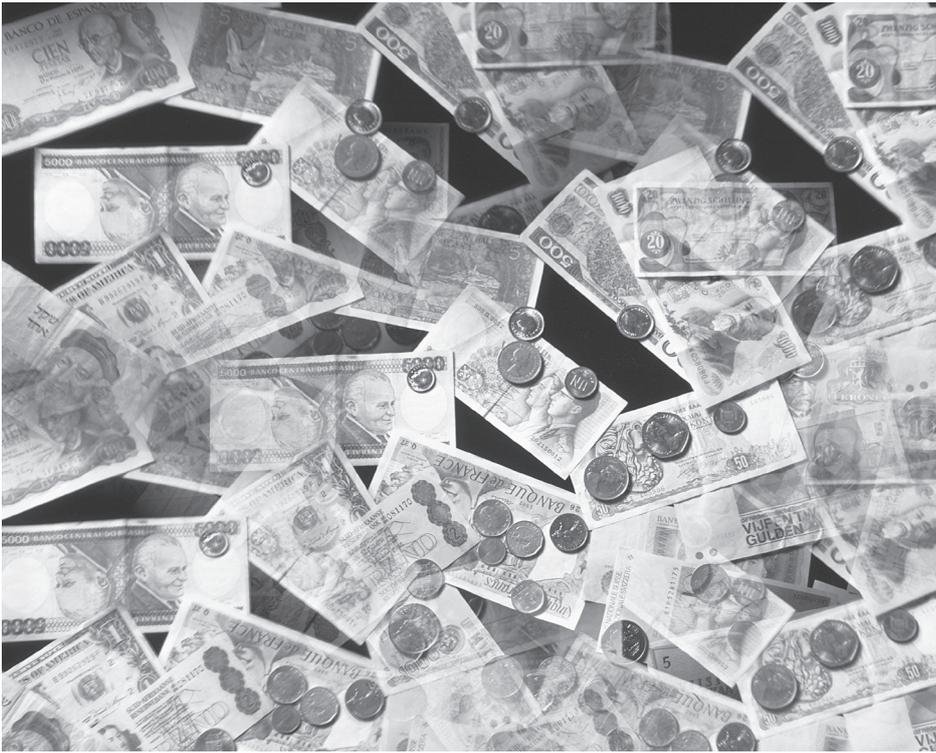
Módulo 2 Introducción al álgebra	53
Expresiones algebraicas	54
Lenguaje algebraico	54
<i>Ejercicios</i>	56
Evaluación de expresiones algebraicas	58
<i>Ejercicios</i>	60
Términos semejantes	61
<i>Ejercicios</i>	63
<i>Ejercicios de repaso</i>	63
 Módulo 3 Resolución de ecuaciones de primer grado	 65
Ecuaciones de una sola variable	66
<i>Ejercicios</i>	70
Ecuaciones y multiplicación.....	71
<i>Ejercicios</i>	75
Ecuaciones de una sola variable, en ambos miembros.....	77
<i>Ejercicios</i>	80
Interpretación geométrica de la resolución de ecuaciones de primer grado.....	81
<i>El plano cartesiano</i>	81
<i>Rectas y ecuaciones lineales de dos variables</i>	83
<i>Ecuaciones de la recta</i>	87
<i>Ejercicios</i>	90
Resolución de problemas	90
<i>Ejercicios</i>	93
Problemas con números enteros	95
<i>Ejercicios</i>	96
Porcentaje.....	98
<i>Ejercicios</i>	101
Desigualdades	103
<i>Ejercicios</i>	108
Desigualdades y el valor absoluto.....	109
<i>Ejercicios</i>	111
Desigualdades y la recta.....	112
<i>Ejercicios</i>	115
<i>Resumen</i>	115
<i>Ejercicios de repaso</i>	116
 Módulo 4 Polinomios.....	 119
Polinomios	120
Producto de potencias	121
<i>Ejercicios</i>	123
Potencias de potencias	125
<i>Ejercicios</i>	126
Potencia de un producto.....	128
<i>Ejercicios</i>	130
División de monomios	130
<i>Ejercicios</i>	132
Grado de un polinomio.....	133
<i>Ejercicios</i>	134
Suma y resta de polinomios.....	135
<i>Ejercicios</i>	137
Producto de un polinomio por un monomio	138
<i>Ejercicios</i>	140
Multiplicación de polinomios.....	141
<i>Ejercicios</i>	143
<i>Resumen</i>	144
<i>Ejercicios de repaso</i>	144

Módulo 5 Productos notables y factorización.....	147
Cuadrado de una suma: $(a + b)^2$	148
Cuadrado de una diferencia: $(a - b)^2$	150
<i>Ejercicios</i>	152
Producto de una suma por una diferencia: $(a + b)(a - b)$	154
Producto de $(a + b)(a + c)$	156
<i>Ejercicios</i>	157
Otros productos notables.....	159
<i>Ejercicios</i>	160
Factorización de polinomios	161
<i>Máximo común divisor (MCD) de monomios</i>	161
<i>Máximo común divisor (MCD) de un polinomio</i>	162
<i>Ejercicios</i>	162
Factorización por agrupamiento	163
<i>Ejercicios</i>	167
Factorización de trinomios: $x^2 + bx + c$	168
<i>Ejercicios</i>	173
Casos particulares.....	174
<i>Ejercicios</i>	178
Factorización de trinomios: $ax^2 + bx + c$	179
<i>Factorización de trinomios cuadrados perfectos</i>	183
<i>Factorización de diferencias de cuadrados</i>	185
<i>Ejercicios</i>	186
Combinando distintos métodos de factorización	188
<i>Ejercicios</i>	190
Factorización de otros productos notables.....	190
<i>Ejercicios</i>	193
<i>Resumen</i>	194
<i>Ejercicios de repaso</i>	195
Módulo 6 Expresiones racionales	197
Introducción	198
<i>Ejercicios</i>	200
Simplificación de expresiones racionales	201
<i>Ejercicios</i>	204
Multiplicación de expresiones racionales.....	205
<i>Ejercicios</i>	207
División de expresiones racionales	208
<i>Ejercicios</i>	209
Suma y resta de expresiones racionales con el mismo denominador	210
<i>Ejercicios</i>	212
Suma y resta de expresiones racionales con distinto denominador.....	213
<i>Ejercicios</i>	215
División de polinomios	216
<i>Ejercicios</i>	220
División sintética	220
<i>Raíces enteras de polinomios enteros</i>	220
<i>Ejercicios</i>	227
Expresiones algebraicas complicadas	229
<i>Ejercicios</i>	231
<i>Resumen</i>	232
<i>Ejercicios de repaso</i>	232
Módulo 7 Radicales.....	235
La raíz cuadrada.....	236
<i>Interpretación geométrica de \sqrt{x}</i>	239
<i>Operaciones con raíces cuadradas</i>	239
<i>Ejercicios</i>	246

Raíces de orden superior	247
<i>Ejercicios</i>	251
Racionalización (de denominadores) de expresiones con radicales	252
<i>Ejercicios</i>	254
Reducción de expresiones radicales	254
<i>Ejercicios</i>	256
Exponentes negativos y fraccionarios	257
<i>Ejercicios</i>	262
Ecuaciones con radicales	262
<i>Ejercicios</i>	266
Los números complejos	268
<i>Ecuaciones sin solución en \mathbb{R}</i>	268
<i>Definición del sistema de los números complejos. El número i</i>	268
Operaciones con complejos.....	270
Raíces cuadradas de reales negativos	271
<i>Ejercicios</i>	273
<i>Resumen</i>	273
<i>Ejercicios de repaso</i>	274
Apéndice.....	275
Módulo 8 Ecuación general de segundo grado	277
Cómo completar cuadrados	278
<i>Ejercicios</i>	282
Solución de la ecuación general de segundo grado.....	284
<i>Interpretación geométrica de la resolución de ecuaciones de segundo grado</i>	287
<i>Algunos elementos de la parábola</i>	290
<i>Ejercicios</i>	292
Aplicaciones.....	294
<i>Geometría</i>	294
<i>Física</i>	297
<i>Ejercicios</i>	299
Desigualdades de segundo grado	300
<i>Ejercicios</i>	304
<i>Resumen</i>	305
<i>Ejercicios de repaso</i>	305
Módulo 9 Sistemas de ecuaciones.....	307
Relación entre ecuaciones simultáneas e intersección de rectas	308
<i>Ejercicios</i>	311
Método de igualación	311
<i>Ejercicios</i>	314
Método de suma y resta	316
<i>Ejercicios</i>	320
Método de sustitución.....	321
<i>Ejercicios</i>	325
Otros sistemas de ecuaciones simultáneas.....	326
<i>Ejercicios</i>	329
Método de Gauss	331
<i>Ejercicios</i>	336
Determinantes.....	338
<i>Ejercicios</i>	344
Balanceo de ecuaciones químicas.....	345
<i>Ejercicios</i>	348
Sistema de una ecuación de primer grado y una de segundo grado en dos variables.....	350
<i>Ejercicios</i>	355
Desigualdades	355
<i>Sistema de una ecuación y una desigualdad</i>	355

<i>Ejercicios</i>	358
<i>Método gráfico de un sistema de dos desigualdades</i>	359
<i>Ejercicios</i>	362
<i>Introducción a la programación lineal</i>	362
<i>Ejercicios</i>	365
<i>Resumen</i>	366
<i>Ejercicios de repaso</i>	367
A Respuesta de los ejercicios impares	369
El campo de los números reales	369
<i>Ejercicios de la página 8</i>	369
<i>Ejercicios de la página 11</i>	369
<i>Ejercicios de la página 16</i>	370
<i>Ejercicios de la página 19</i>	370
<i>Ejercicios de la página 22</i>	370
<i>Ejercicios de la página 28</i>	370
<i>Ejercicios de la página 38</i>	371
<i>Ejercicios de la página 42</i>	371
<i>Ejercicios de la página 46</i>	371
<i>Ejercicios de la página 48</i>	371
<i>Ejercicios de la página 50</i>	371
<i>Ejercicios de repaso de la página 51</i>	371
Introducción al álgebra	372
<i>Ejercicios de la página 56</i>	372
<i>Ejercicios de la página 60</i>	372
<i>Ejercicios de la página 63</i>	372
<i>Ejercicios de repaso de la página 63</i>	372
Resolución de ecuaciones de primer grado.....	373
<i>Ejercicios de la página 70</i>	373
<i>Ejercicios de la página 75</i>	373
<i>Ejercicios de la página 80</i>	373
<i>Ejercicios de la página 90</i>	373
<i>Ejercicios de la página 93</i>	374
<i>Ejercicios de la página 96</i>	374
<i>Ejercicios de la página 101</i>	374
<i>Ejercicios de la página 108</i>	374
<i>Ejercicios de la página 111</i>	375
<i>Ejercicios de la página 115</i>	375
<i>Ejercicios de repaso de la página 116</i>	376
Polinomios	376
<i>Ejercicios de la página 123</i>	376
<i>Ejercicios de la página 126</i>	376
<i>Ejercicios de la página 130</i>	377
<i>Ejercicios de la página 132</i>	377
<i>Ejercicios de la página 134</i>	377
<i>Ejercicios de la página 137</i>	377
<i>Ejercicios de la página 140</i>	377
<i>Ejercicios de la página 143</i>	378
<i>Ejercicios de repaso de la página 144</i>	378
Productos notables y factorización	378
<i>Ejercicios de la página 152</i>	378
<i>Ejercicios de la página 157</i>	379
<i>Ejercicios de la página 160</i>	379
<i>Ejercicios de la página 162</i>	379
<i>Ejercicios de la página 167</i>	379
<i>Ejercicios de la página 173</i>	379
<i>Ejercicios de la página 178</i>	379
<i>Ejercicios de la página 186</i>	380

<i>Ejercicios de la página 190</i>	380
<i>Ejercicios de la página 193</i>	380
<i>Ejercicios de repaso de la página 195</i>	380
Expresiones racionales	381
<i>Ejercicios de la página 200</i>	381
<i>Ejercicios de la página 204</i>	381
<i>Ejercicios de la página 207</i>	381
<i>Ejercicios de la página 209</i>	381
<i>Ejercicios de la página 212</i>	381
<i>Ejercicios de la página 215</i>	381
<i>Ejercicios de la página 220</i>	381
<i>Ejercicios de la página 227</i>	382
<i>Ejercicios de la página 231</i>	382
<i>Ejercicios de repaso de la página 232</i>	382
Radicales	382
<i>Ejercicios de la página 246</i>	382
<i>Ejercicios de la página 251</i>	382
<i>Ejercicios de la página 254</i>	383
<i>Ejercicios de la página 256</i>	383
<i>Ejercicios de la página 262</i>	383
<i>Ejercicios de la página 266</i>	383
<i>Ejercicios de la página 273</i>	383
<i>Ejercicios de repaso de la página 274</i>	383
Ecuación general de segundo grado.....	384
<i>Ejercicios de la página 282</i>	384
<i>Ejercicios de la página 292</i>	384
<i>Ejercicios de la página 299</i>	384
<i>Ejercicios de la página 304</i>	384
<i>Ejercicios de repaso de la página 305</i>	384
Sistemas de ecuaciones.....	385
<i>Ejercicios de la página 311</i>	385
<i>Ejercicios de la página 314</i>	385
<i>Ejercicios de la página 320</i>	386
<i>Ejercicios de la página 325</i>	386
<i>Ejercicios de la página 329</i>	386
<i>Ejercicios de la página 336</i>	386
<i>Ejercicios de la página 344</i>	386
<i>Ejercicios de la página 348</i>	386
<i>Ejercicios de la página 355</i>	387
<i>Ejercicios de la página 358</i>	387
<i>Ejercicios de la página 362</i>	387
<i>Ejercicios de la página 365</i>	388
<i>Ejercicios de repaso de la página 367</i>	388
Índice de materias	389



MÓDULO 1

El campo de los números reales

En este módulo presentamos un repaso de los conceptos y las técnicas fundamentales de la aritmética de los números reales que son esenciales para la comprensión y manipulación de las expresiones algebraicas. Los alumnos que ingresan al bachillerato ya conocen la mayor parte del contenido de este módulo por lo que el profesor puede optar por estudiarlo muy rápidamente para poder dedicar más tiempo a los temas sustantivos del álgebra.

Introducción

Los números han surgido a lo largo de la historia como una herramienta para resolver problemas de conteo, medición, ordenación, etcétera. Actualmente los vemos como algo ya terminado y tendemos a creer que siempre existieron así; sin embargo, en cada época, cuando se introdujo algún número nuevo o grupo de números nuevo, a menudo se suscitaban polémicas muy fuertes y estos números tardaban muchos años en ser aceptados por la comunidad en general. Tales son los casos del cero, de los números negativos, los números irracionales, etcétera.

Los primeros números que surgieron históricamente fueron los *números naturales* 1, 2, 3, 4, ... que nos sirven para contar. Aunque el cero apareció después, es más práctico considerarlo dentro de los números naturales. Denotamos por \mathbb{N} al conjunto de los números naturales, es decir,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Uno de los primeros problemas a los que nos enfrentamos al considerar únicamente a los números naturales, es que al restar dos de ellos el resultado no es siempre otro natural. Por ejemplo, en la escuela primaria nos enseñaron que $5 - 8$ “no se puede efectuar”. Lo que sucede es que la respuesta no es un número natural.

Para poder restar cualquier par de números naturales es necesario introducir los números enteros negativos que junto con los números naturales constituyen los *números enteros*:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Los números *naturales* también son llamados *enteros no negativos*.

Al restar cualquier par de estos números se obtiene otro entero. Los números negativos son útiles en la vida cotidiana para representar cantidades como temperaturas por debajo del punto de congelación del agua (0°C), deudas monetarias y profundidades con relación al nivel del mar de zonas que están por debajo de éste, entre otras cosas.

Así como enfrentamos el problema de no poder restar si tenemos sólo números naturales, también enfrentamos el problema de no poder dividir si tenemos sólo números enteros; por ejemplo, al dividir $5 \div 3$ no obtenemos un número entero, por lo que es necesario ampliar el conjunto de números.

Consideramos ahora el conjunto de los *números racionales*, que son aquellos que pueden escribirse como cociente de dos números enteros, donde el denominador no es el cero.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Observemos que como todo número entero se puede escribir como el cociente de él mismo entre uno, $n = \frac{n}{1}$, entonces todo número entero es un número racional; así,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Los números racionales son suficientemente buenos para la mayoría de las operaciones que realizamos cotidianamente; sin embargo, ya desde los pitagóricos, en el siglo v a. de C, se dieron cuenta de que con una regla y un compás se podían construir segmentos cuya longitud no se podía expresar como cociente de dos enteros. Por ejemplo, en el triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1, la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ y este número no se puede escribir en la forma $\frac{p}{q}$ con p y q enteros; es decir, $\sqrt{2}$ no es un número racional.

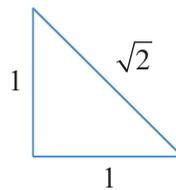


Figura 1-1 Construcción de $\sqrt{2}$.

Como veremos en las secciones siguientes, todos los números racionales pueden identificarse con puntos en una recta. El hecho de que, por ejemplo $\sqrt{2}$ no sea un número racional, significa que hay un punto en la recta al que no se le ha asociado ningún número racional; de hecho, hay una infinidad de dichos puntos, por lo que es necesario inventar otros números, llamados *números irracionales*, para los puntos de la recta a los que no se les ha asociado ningún número racional. Es así como surgen los *números reales*, que son la unión de los números racionales e irracionales.

Finalmente, los números reales también presentan un problema similar al de la resta en los números naturales y la división en los números enteros; este problema consiste en que no se puede sacar raíz cuadrada de los números negativos; por ejemplo, $\sqrt{-4}$ no existe ya que no hay ningún número real x tal que $x^2 = -4$. Por esto, es necesario introducir más números; los *números complejos*, para poder, ahora sí, obtener la raíz cuadrada, o cualquier otra raíz, de todo número real, o más en general, de todo número complejo.

En las siguientes secciones estudiaremos con detenimiento las propiedades de los sistemas numéricos mencionados.

Los números enteros

Los números enteros pueden representarse como puntos en la recta. Para ello, seleccionamos un punto para representar al 0 y otro para representar el 1, que normalmente colocamos a la derecha del 0. Estos puntos determinan la escala y la colocación de los demás enteros, en ella: los números naturales se van colocando hacia la derecha en orden, dejando entre dos consecutivos el mismo espacio que entre 0 y 1; es decir, una unidad. Asimismo, a partir del 0, pero ahora hacia la izquierda, se colocan consecutivamente los números $-1, -2, -3, \dots$

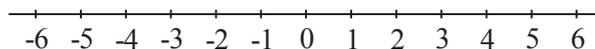


Figura 1-2 Los enteros en la recta.

En la recta numérica, el 5 está colocado a la derecha del 0 y el -5 del lado izquierdo. La distancia de 5 a 0 es 5 unidades y la distancia de -5 a 0 también es 5 unidades.

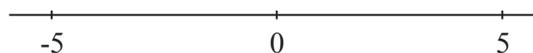


Figura 1-3 5 y -5 en la recta numérica.

4 Módulo 1 ♦ El campo de los números reales

La distancia de un número a 0 se llama el *valor absoluto* del número y se representa encerrando al número entre dos rayas verticales, así:

$|5| = 5$ significa que el valor absoluto de 5 es 5.

$|-5| = 5$ significa que el valor absoluto de -5 es 5.

Suma de números enteros

Las dos operaciones principales de los números enteros son la suma y el producto. El producto también se conoce como multiplicación. Veamos primero una interpretación geométrica de la suma.

Para hallar la suma de 2 y 5, dibujamos una recta numérica. Colocamos el lápiz en el 2 y nos movemos 5 unidades hacia la *derecha*, con lo que llegamos al 7.

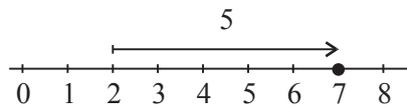


Figura 1-4 Suma de 2 y 5.

Cuando a un número le sumamos un número *positivo*, entonces nos movemos hacia la *derecha* y cuando le sumamos un número *negativo*, entonces nos movemos hacia la *izquierda*.

Ejemplos

1. Sumar $3 + (-7)$.

Solución:

Localizamos el 3 y desde ahí nos movemos 7 unidades hacia la *izquierda*, con lo que llegamos a -4 . Así que $3 + (-7) = -4$.

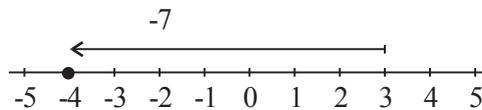


Figura 1-5 Suma de 3 y (-7) .

2. Sumar $-8 + (-4)$.

Solución:

Localizamos a -8 y desde ahí nos movemos 4 unidades hacia la *izquierda*, con lo que llegamos a -12 . Así que $-8 + (-4) = -12$.

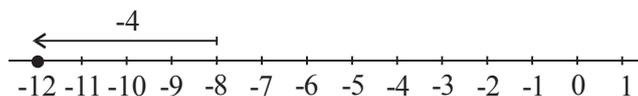


Figura 1-6 Suma de -8 y (-4) .

Sería poco práctico tener que utilizar la recta numérica para poder sumar enteros positivos y negativos; las siguientes reglas nos permiten hacerlo de manera sencilla, usando lo aprendido en la escuela primaria.

Reglas para sumar números enteros

- Para sumar dos números enteros con el mismo signo:
 1. Se suman los valores absolutos de los números, es decir, como si fueran positivos.
 2. Se determina el signo de la suma:
 - a) Si ambos son positivos, la suma es positiva.
 - b) Si ambos son negativos, la suma es negativa.

Ejemplo

- Sumar $-35 + (-82)$.

Solución:

Sumamos valores absolutos de los números: $35 + 82 = 117$.

La suma es negativa ya que ambos son negativos: $-35 + (-82) = -117$.

- Para sumar dos números enteros de signo contrario:
 1. Se restan los valores absolutos de los números: el menor del mayor.
 2. El signo de la suma es el signo del sumando que tenga el mayor valor absoluto.

Ejemplos

1. Sumar $-17 + (4)$.

Solución:

El valor absoluto de -17 es 17, que es mayor que el de 4.

Restamos los valores absolutos: $17 - 4 = 13$.

La suma es negativa porque $|-17| > |4|$; así, $-17 + (4) = -13$.

2. Sumar $-27 + 69$.

Solución:

El valor absoluto de 69 es mayor que el de -27 .

Restamos los valores absolutos: $69 - 27 = 42$.

La suma es positiva porque $|69| > |-27|$; así, $-27 + 69 = 42$.

Desde que aprendimos a sumar en la primaria, nos enseñaron que al sumar dos números, no importa el orden en el que los sumemos; así:

$$9 + 4 = 13 = 4 + 9$$

y al sumar más de dos números, lo que debemos hacer es agrupar dos de ellos, sumarlos y el resultado sumarlo al resto, por ejemplo: la suma $3 + 5 + 2$ la podemos realizar de las siguientes dos maneras:

$$(3 + 5) + 2 = 8 + 2 = 10 \quad \text{y} \quad 3 + (5 + 2) = 3 + 7 = 10$$

y simplemente escribimos

$$3 + 5 + 2 = 10.$$

También sabemos que sumar 0 “no hace nada”:

$$4 + 0 = 4.$$

Propiedades de la suma de números enteros

A continuación se enlistan las propiedades de suma de los números enteros que acabamos de ejemplificar.

La suma de números enteros satisface las siguientes propiedades:

- *Propiedad de cerradura:* Si a y b son números enteros, entonces $a + b$ es un número entero.
- *Propiedad conmutativa:* Si a y b son números enteros, entonces $a + b = b + a$.
- *Propiedad asociativa:* Si a , b y c son números enteros, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- *Existencia del neutro aditivo:* El número 0 satisface la igualdad $a + 0 = a$ para cualquier número entero a .
- *Existencia del opuesto, inverso aditivo o simétrico:* Si a es un número entero cualquiera, existe un único número entero al que llamamos $-a$, que satisface la igualdad $a + (-a) = 0$.

Observaciones

- Los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ satisfacen todas las propiedades anteriores con *excepción de la existencia del inverso aditivo*, ya que, por ejemplo, el inverso aditivo de 3 es -3 , que no es un número natural.
- El símbolo $(-a)$ significa el inverso aditivo de a , independientemente de que a sea positivo o negativo. Así por ejemplo, como $4 + (-4) = 0$, entonces el inverso aditivo de $a = 4$ es $-a = -4$, pero también, el inverso aditivo de $a = -4$ es 4, es decir, $-a = -(-4) = 4$.

En general, si a es un número entero, entonces

$$-(-a) = a.$$

Ejemplos

1. El opuesto de 5 es -5 .
2. El opuesto de -8 es 8.
3. El opuesto de 0 es 0.
4. Verificar geoméricamente la propiedad conmutativa con $a = -7$, $b = 4$.

Solución:

Localizamos -7 y desde ahí nos movemos 4 unidades a la derecha y llegamos a -3 .

Localizamos a 4 y desde ahí nos movemos 7 unidades a la izquierda y llegamos también a -3 . Así,

$$-7 + 4 = 4 + (-7) = -3$$

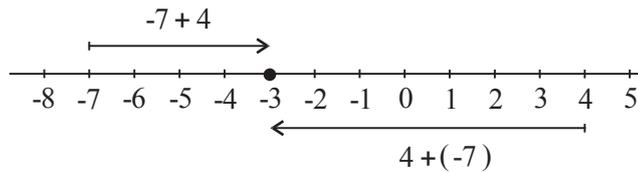


Figura 1-7

5. Verificar geoméricamente la propiedad asociativa con $a = -8$, $b = 6$ y $c = -5$.

Solución:

Para sumar $(-8 + 6) + (-5)$, a partir de -8 nos movemos 6 unidades a la derecha, llegamos a -2 , y si desde ahí nos movemos 5 unidades a la izquierda, llegamos a -7 .

Para sumar $-8 + (6 + (-5))$, efectuamos primero $6 + (-5)$, con lo que nos colocamos en 6 y de ahí nos movemos 5 unidades a la izquierda, con lo cual llegamos a 1. Ahora, si a partir de -8 nos movemos 1 unidad a la derecha, llegamos a -7 . Así que tenemos:

$$(-8 + 6) + (-5) = -2 + (-5) = -7$$

$$-8 + (6 + (-5)) = -8 + 1 = -7.$$

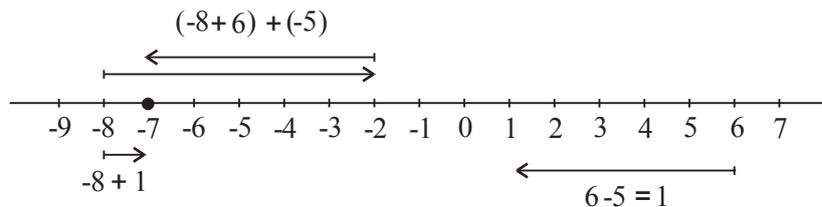


Figura 1-8 $(-8 + 6) + (-5)$.

6. Verificar geoméricamente las propiedades del neutro y del inverso aditivo con el número 8.

Solución:

Localizamos el 8 y no nos movemos, entonces seguimos en el 8, así que

$$8 + 0 = 8.$$

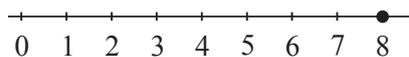


Figura 1-9 $8 + 0 = 8$.

Para ver la propiedad del opuesto, localizamos el 8 y nos movemos 8 unidades hacia la izquierda con lo que llegamos a 0, así:

$$8 + (-8) = 0.$$

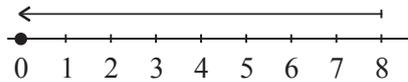


Figura 1-10 $8 + (-8) = 0$.

Las propiedades conmutativa y asociativa, así como las reglas anteriores nos permiten sumar más de dos números enteros.

Ejemplo

- Sumar $86 + (-37) + (-49) + 93 + (-32)$.

Solución:

Aplicamos la propiedad conmutativa para poner todos los números positivos juntos y todos los números negativos juntos.

$$86 + 93 + (-37) + (-49) + (-32).$$

Sumamos por separado los números positivos y los números negativos siguiendo las reglas para sumar números del mismo signo:

$$86 + 93 = 179 \quad \text{y} \quad (-37) + (-49) + (-32) = -118,$$

sumamos estos resultados parciales

$$179 + (-118) = 61,$$

así,

$$86 + (-37) + (-49) + 93 + (-32) = 61.$$

Ejercicios

En los ejercicios 1 a 16, escribe el número que representa cada situación.

1. Un submarino está sumergido a 93 metros.
2. La temperatura es de 4°C .
3. Está 6 metros sobre el nivel del mar.
4. Tiene \$35 en sus ahorros.
5. La temperatura es de 15°C bajo cero.
6. 36 metros bajo el nivel del mar.
7. 18°C sobre el punto de congelación del agua.
8. Debe \$200.
9. Se hundió un metro bajo el nivel del mar.
10. 5°C bajo el punto de congelación.
11. Debe \$14 a su hermana.
12. Tiene \$805 en su alcancía.
13. La cima de la montaña está a 1,500 metros sobre el nivel del mar.
14. La Ciudad de México está a 2,303 metros sobre el nivel del mar.

15. El helicóptero se elevó 1,650 metros sobre el nivel del mar.
 16. Un día de invierno, la temperatura, contando el factor viento, llegó a 32°C bajo cero.

En los ejercicios 17 a 22, encuentra el opuesto de cada número.

17. -47 18. 81 19. -13 20. -3 21. 175 22. -0

En los ejercicios 23 a 30, indica el número que debes sumar en cada situación.

23. Bajó 3 kilos de peso. 24. Su dieta tiene 200 calorías menos.
 25. La bolsa de valores perdió 153 puntos. 26. Este barco tiene 5 metros más de ancho.
 27. El resorte se estiró 5 centímetros. 28. El ritmo cardiaco aumentó 5 latidos por minuto.
 29. La temperatura bajó 17°C. 30. Este pan lleva 100 gramos menos de levadura.

En los ejercicios 31 a 34, verifica las propiedades de suma de números enteros.

31. $a = 5, b = 7$ y $c = 1$ 32. $a = -2, b = 4$ y $c = 8$
 33. $a = 1, b = -3$ y $c = -6$ 34. $a = -9, b = -1$ y $c = -18$

En los ejercicios 35 a 42, simplifica las expresiones.

35. $-(-9)$ 36. $-(-(-17))$ 37. $5 - (-7)$ 38. $-(-124)$
 39. $-(13 + 16)$ 40. $-(634 - 498)$ 41. $-(10 - 3)$ 42. $-(-71) + 17$

Resta de números enteros

Dados dos números enteros a y b , la diferencia $a - b$ se define como:

$$a - b = a + (-b),$$

es decir, restar b significa sumar el opuesto de b .

Ejemplos

1. Simplificar $5 - 9$.

Solución:

Restar 9 significa sumar -9 así que aplicamos la regla de la suma de dos números de signo contrario:

$$5 - 9 = 5 + (-9) = -4.$$

2. Simplificar $4 - (3 - 1)$.

Solución:

Resolvemos primero lo que está dentro del paréntesis

$$3 - 1 = 2$$

y ahora efectuamos la resta:

$$4 - 2 = 2,$$

así,

$$4 - (3 - 1) = 2.$$

3. Efectuar la diferencia entre 76 y -11 , menos 54.

Solución:

Traducimos el problema

$$(76 - (-11)) - 54.$$

Ahora realizamos las operaciones indicadas

$$(76 - (-11)) - 54 = 87 - 54 = 33.$$

En el conjunto de los números enteros, la ecuación

$$a + x = b,$$

donde a y b son números enteros, siempre tiene solución, a saber

$$x = b - a.$$

Ejemplo

- Encontrar los valores de x que satisfacen la igualdad $15 + x = 5$.

Solución:

$$x = 5 - 15 = -10,$$

es la solución de la igualdad.

Inverso de una suma

Es claro que $(5 + 7) + (-5 - 7) = 0$; esto quiere decir que el inverso aditivo de $5 + 7$ es $-5 - 7$, pero también es cierto que $(5 + 7) - (5 + 7) = 0$, es decir, el opuesto de $5 + 7$ también es $-(5 + 7)$, pero como cada número tiene un único inverso, entonces

$$-(5 + 7) = -5 - 7.$$

En general, si a y b son números enteros, entonces,

$$-(a + b) = -a - b.$$

Ejemplos

1. Simplificar $-(-15 + 9)$.

Solución:

Podemos efectuar primero la operación dentro del paréntesis y después tomar el inverso aditivo del resultado:

$$-(-15 + 9) = -(-6) = 6,$$

o bien, podemos eliminar el paréntesis poniendo el inverso aditivo de cada sumando y efectuando la operación resultante.

$$-(-15 + 9) = +15 - 9 = 6.$$