

CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES DE MATEMÁTICAS CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Conocimientos fundamentales de Matemáticas Cálculo diferencial e Integral



PEARSON
Educación

Elena de Oteyza (Coordinadora)

PEARSON
Educación®

COLECCIÓN CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES



Conocimientos
Fundamentales de Matemáticas
Cálculo Diferencial e Integral



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Dr. Juan Ramón de la Fuente

RECTOR

Lic. Enrique del Val Blanco

SECRETARIO GENERAL

Mtro. Daniel Barrera Pérez

SECRETARIO ADMINISTRATIVO

Dra. Rosaura Ruiz Gutiérrez

SECRETARIA DE DESARROLLO INSTITUCIONAL

Mtro. José Antonio Vela Capdevila

SECRETARIO DE SERVICIOS A LA COMUNIDAD

Mtro. Jorge Islas López

ABOGADO GENERAL

Mtra. María de Lourdes Sánchez Obregón

DIRECTORA GENERAL DE LA ESCUELA

NACIONAL PREPARATORIA

Mtro. Rito Terán Olguín

DIRECTOR GENERAL DEL COLEGIO

DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Mtra. Carmen Villatoro Alvaradejo

COORDINADORA DEL CONSEJO ACADÉMICO

DEL BACHILLERATO

Dr. Alejandro Pisanty Baruch

DIRECTOR GENERAL DE SERVICIOS

DE CÓMPUTO ACADÉMICO

Dr. Francisco Cervantes Pérez

COORDINADOR DE UNIVERSIDAD

ABIERTA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA

Lic. Néstor Martínez Cristo

DIRECTOR GENERAL DE COMUNICACIÓN SOCIAL

Colección Conocimientos Fundamentales

Esta colección es parte de un programa de la UNAM orientado a la producción de libros y materiales digitales para el bachillerato.

Colección Conocimientos Fundamentales

Conocimientos Fundamentales de Matemáticas

Cálculo Diferencial e Integral

M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza
(Coordinadora)

M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza
Profesora de la Facultad de Ciencias, UNAM

M. en C. Emma Lam Osnaya
Profesora de la Facultad de Ciencias, UNAM

Dr. Carlos Hernández Garciadiego
Investigador del Instituto de Matemáticas, UNAM

M. en C. Ángel Manuel Carrillo Hoyo
Investigador del Instituto de Matemáticas, UNAM



Universidad Nacional Autónoma de México
México, 2006



México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

DE OTEYZA, ELENA *et al.*
Conocimientos Fundamentales de Matemáticas,
Cálculo Diferencial e Integral

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2006

ISBN: 978-970-26-0962-9

Área: Bachillerato

Formato: 21 × 27 cm

Páginas: 440

Programa Conocimientos Fundamentales para la Enseñanza Media Superior

Coordinación general: Dra. Rosaura Ruiz Gutiérrez y Dr. Arturo Argueta Villamar

Coordinación operativa: Mtro. Alfredo Arnaud Bobadilla

Coordinación editorial: Lic. Consuelo Yerena Capistrán

La Coordinación agradece la colaboración de la Escuela Nacional Preparatoria, el Colegio de Ciencias y Humanidades, el Consejo Académico del Bachillerato, la Facultad de Filosofía y Letras, la Facultad de Ciencias, la Facultad de Química, el Instituto de Ecología, el Instituto de Geografía, el Instituto de Investigaciones Filosóficas, el Instituto de Matemáticas, el Instituto de Física, el Instituto de Investigaciones en Materiales, el Centro de Ciencias Físicas, la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico, la Coordinación de Universidad Abierta y Educación a Distancia, la Dirección General de Actividades Cinematográficas, la Dirección General de Divulgación de la Ciencia, la Dirección General de Televisión Universitaria y la Dirección de Literatura. Se agradece también a la Academia Mexicana de Ciencias.

Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Cálculo Diferencial e Integral

1ª edición, 2006

Colección Conocimientos Fundamentales

D. R. UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Cd. Universitaria, 04510, México, D. F.

Secretaría de Desarrollo Institucional

ISBN 970 32 3841 6

PRIMERA EDICIÓN, 2006

D.R. © 2006 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Atlacomulco No. 500 – 5º piso

Col. Industrial Atoto

53519, Naucalpan de Juárez, Edo. de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

ISBN 10: 970-26-0962-3

ISBN 13: 978-970-26-0962-9

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 09 08 07 06



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



Presentación

El saber, entendido como fuerza que impulsa de manera determinante al desarrollo, tanto individual como social, constituye una condición necesaria para el crecimiento, la democracia, la equidad y la libertad.

En el contexto de la sociedad del conocimiento, la formación media superior se ha convertido en un tema de atención prioritaria para las instituciones educativas. Sus nuevas tendencias, oportunidades y posibilidades, su función de enlace entre los niveles básico y profesional y su situación estratégica en el proceso formativo, dotan al bachillerato de un gran potencial.

El libro que tienes en tus manos es producto de un muy estimable esfuerzo hecho por la Universidad Nacional Autónoma de México para fortalecer al bachillerato. Forma parte de la **Colección Conocimientos Fundamentales** para la enseñanza media superior, concebida bajo la visión de que los acelerados cambios y transformaciones de las últimas décadas en los diversos campos del saber y del quehacer humano, deben reflejarse en los contenidos educativos del siglo que inicia. En tal sentido, este ciclo de estudios está siendo objeto de un profundo análisis.

Entre los aspectos que, sin duda, impulsarán al bachillerato, están su articulación orgánica con las etapas educativas posteriores; el establecimiento de estrategias de atención a requerimientos pedagógicos específicos; la modificación curricular sustentada en el perfil de egreso y en los conocimientos relevantes y pertinentes que requiere el estudiante; el mejoramiento de la docencia, y la incorporación de nuevas tecnologías a la enseñanza-aprendizaje en esta etapa.

Con base en lo anterior, la Secretaría de Desarrollo Institucional, en colaboración con la Escuela Nacional Preparatoria, el Colegio de Ciencias y Humanidades y el Consejo Académico del Bachillerato de la UNAM, ha emprendido un programa conducente a replantear los contenidos temáticos de las disciplinas que se imparten en este nivel de estudios.

Los libros y materiales de la **Colección Conocimientos Fundamentales** para la enseñanza media superior son el punto de partida para establecer los cimientos de una formación que, efectivamente, te proporcione una cultura general interdisciplinaria y de capacidades específicas para que puedas responder a las exigencias de un entorno cada vez más complejo y demandante. Dichos conocimientos, además de las habilidades y valores correspondientes, deben prepararte también para el aprendizaje a lo largo de tu vida.

La Colección cuenta con la participación de destacados académicos de la Universidad, en el marco de un programa institucional destinado a rendir sus mejores frutos en beneficio de los jóvenes del bachillerato en México y en América Latina.

*Dr. Juan Ramón de la Fuente
Rector de la Universidad
Nacional Autónoma de México*

Prefacio

La Secretaría de Desarrollo Institucional, en colaboración con la Escuela Nacional Preparatoria, el Colegio de Ciencias y Humanidades y el Consejo Académico del Bachillerato de la UNAM, emprendió la tarea de reflexionar sobre los contenidos temáticos de las disciplinas que se imparten en el bachillerato, bajo la premisa de que la enseñanza media superior tiene como objetivos principales la formación de estudiantes que continúen sus estudios en la licenciatura y el posgrado, con posibilidades reales de incorporarse a la vida laboral, con un claro compromiso social.

Las disciplinas elegidas para trabajar en una primera etapa fueron: biología, filosofía, física, geografía, matemáticas, literatura y química. Se formaron grupos de trabajo integrados por profesores del bachillerato, la licenciatura y el posgrado, que definieron los conocimientos fundamentales de cada disciplina, en función de su desarrollo reciente, de su pertinencia en el marco de la enseñanza media superior y del impulso a la interdisciplina.

La definición de los conocimientos fundamentales tiene como fin el determinar los saberes básicos e imprescindibles con que los estudiantes deben contar al término del ciclo del bachillerato y proporcionar a los alumnos una cultura general de la disciplina, que les permita estar preparados para incursionar en nuevos espacios del saber.

Una vez establecidos tales conocimientos, se integraron grupos de trabajo más amplios para elaborar los contenidos de los libros, de los discos compactos y de la página web, que son los tres materiales de apoyo a tu formación que incluye este programa. Éstos se insertan en el marco de la **Colección Conocimientos Fundamentales** para que puedas usarlos con la orientación y apoyo de tus profesores.

La definición y la producción de los materiales de esta Colección, contó con la amplia participación de la Escuela Nacional Preparatoria, el Colegio de Ciencias y Humanidades, el Consejo Académico del Bachillerato, la Facultad de Filosofía y Letras, la Facultad de Ciencias, la Facultad de Química, el Instituto de Ecología, el Instituto de Geografía, el Instituto de Investigaciones Filosóficas, el Instituto de Matemáticas, el Instituto de Física, el Instituto de Investigaciones en Materiales, el Centro de Ciencias Físicas, la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico, la Coordinación de Universidad Abierta y Educación a Distancia, la Dirección General de Actividades Cinematográficas, la Dirección General de Divulgación de la Ciencia, la Dirección General de Televisión Universitaria y la Dirección de Literatura. También contribuyó en la tarea un selecto grupo de miembros de la Academia Mexicana de Ciencias, quienes hicieron sugerencias para mejorar los materiales. A todos ellos, nuestro reconocimiento y gratitud.

El Programa de Fortalecimiento del Bachillerato, del que forma parte la **Colección Conocimientos Fundamentales** es una iniciativa de la UNAM destinada a apoyar y fortalecer los estudios de bachillerato en lengua española.

Con esta primera serie de libros y materiales para siete disciplinas, nuestra Universidad inicia esta Colección que habrá de enriquecerse con una serie de nuevos títulos, realizados con la calidad y el profesionalismo propios de nuestra Casa de Estudios. Están dirigidos a los maestros y estudiantes del nivel medio superior.

Dra. Rosaura Ruiz Gutiérrez
Secretaria de Desarrollo Institucional

Índice

Presentación.....	V
Prefacio.....	VII
Módulo 1 Funciones.....	1
Funciones	2
Modos de expresar la regla de correspondencia de una función	6
Igualdad de funciones	8
Ejercicios.....	9
Módulo 2 Funciones reales de variable real.....	11
Funciones reales de variable real	12
El dominio natural	12
Ejercicios	14
Gráfica de una función.....	14
Ejercicios	20
Módulo 3 Funciones de uso frecuente.....	23
Casos especiales.....	24
Funciones algebraicas	32
Funciones trascendentes.....	34
Ejercicios.....	41
Módulo 4 Operaciones con las funciones.....	43
Operaciones con las funciones.....	44
Ejercicios	49
Composición de funciones	51
Ejercicios.....	57
Resumen.....	58
Ejercicios de repaso	58
Módulo 5 Continuidad de funciones.....	59
Continuidad.....	60
Continuidad de algunas funciones de uso frecuente	62
Continuidad de las funciones: lineales, x^n con $n \geq 1$ y $\frac{1}{x}$	62
Continuidad de las funciones seno y coseno	65
Operaciones con funciones continuas.....	66
Otras funciones continuas de uso frecuente.....	70
Funciones polinomiales.....	70
Funciones racionales y x^n con n entero	70
Ejercicios.....	73
Las raíces	73

Funciones trigonométricas.....	75
Función valor absoluto $ x $	76
Composición de funciones continuas	78
Ejemplo de una función que no es continua en un punto de su dominio.....	82
Ejercicios.....	83
La gráfica en un intervalo de una función continua.....	84
Ejercicios.....	86
Resumen.....	87
Ejercicios de repaso	87
Apéndice.....	87
Comentarios sobre la definición de función continua.....	87
Demostraciones de la continuidad de algunas de las funciones de uso frecuente.....	88
Pruebas de la continuidad de funciones obtenidas al operar con funciones continuas.....	92
Módulo 6 Límites de funciones	99
Límites.....	100
Límites laterales.....	105
Propiedades de los límites.....	108
Ejercicios.....	109
Formas indeterminadas del tipo $0/0$	110
Usando factorización	110
Ejercicios.....	113
Multiplicando por el conjugado	113
Ejercicios	115
Límites de composiciones	115
Ejercicios	117
Límites que involucran a $\frac{\sin x}{x}$	118
Ejercicios	121
Resumen.....	122
Ejercicios de repaso	122
Módulo 7 Derivada de una función	123
Introducción	124
Ejercicios.....	128
La derivada como función.....	128
Propiedades algebraicas de la derivada.....	131
Ejercicios.....	136
Derivadas de las funciones trigonométricas	137
Ejercicios.....	137
Regla de la cadena	138
Ejercicios.....	139
Razón de cambio	140
Ejercicios.....	146
Resumen.....	147
Ejercicios de repaso	148
Apéndice.....	149
Módulo 8 Funciones inversas y sus derivadas	157
Funciones inversas.....	158
Gráficas de f y f^{-1}	161
Funciones trigonométricas inversas	163
Derivada de las funciones inversas trigonométricas	169
Ejercicios.....	169
Resumen.....	170
Apéndice.....	170
Derivadas de las funciones trigonométricas inversas.....	171

Módulo 9 Máximos y mínimos	175
Funciones crecientes y decrecientes	176
Ejercicios	182
Máximos y mínimos	182
Criterio de la primera derivada	184
Ejercicios	188
Criterio de la segunda derivada	188
Ejercicios	191
Problemas	191
Introducción	191
Ejercicios	194
Problemas de máximos y mínimos	195
Ejercicios	200
Resumen	201
Ejercicios de repaso	202
 Módulo 10 Límites infinitos y al infinito	 205
Límites infinitos y asíntotas verticales	206
Ejercicios	212
Límites en el infinito	212
Asíntotas horizontales y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$	212
Ejercicios	218
Límites infinitos en el infinito	218
Asíntotas oblicuas de funciones racionales	222
Ejercicios	224
Formas indeterminadas $\infty - \infty$	225
Encontrando el denominador común	225
Multiplicando por el conjugado	227
Regla de L'Hôpital	230
Ejercicios	234
Resumen	235
Ejercicios de repaso	236
 Módulo 11 Logaritmos y exponenciales	 237
El logaritmo natural y el número e	238
Propiedades	239
Función exponencial	242
Propiedades de la función exponencial:	244
Ejercicios	244
Límites con logaritmos y exponenciales	245
Ejercicios	246
a^x para $a > 0$ y x un número real cualquiera	247
Leyes de los exponentes	248
La función $f(x) = x^b$ con b irracional	248
Funciones logarítmicas y exponenciales	249
Ejercicios	253
Ecuaciones logarítmicas y exponenciales	254
Ejercicios	255
Aplicaciones	255
El interés compuesto	255
Comportamiento exponencial	257
Ejercicios	260
a^x vs. x^a , con $a > 1$	261
Resumen	264
Ejercicios de repaso	265
Apéndice	267
Demostraciones de las propiedades de la función logaritmo natural	267

<i>Demostración de las propiedades de la función exponencial.....</i>	<i>271</i>
<i>Demostración de las propiedades de las funciones logarítmicas.....</i>	<i>272</i>
Módulo 12 La gráfica de una función.....	273
Concavidad de una función	274
Ejercicios.....	279
Gráfica de una función.....	279
Ejercicios.....	297
Resumen.....	298
Ejercicios de repaso	298
Módulo 13 La integral	299
Antiderivadas	300
Ejercicios.....	304
Cambio de variable	305
Ejercicios.....	308
Resumen.....	309
Ejercicios de repaso	309
Módulo 14 La integral definida	311
Introducción	312
Ejercicios.....	313
Interpretación geométrica de la integral definida	314
Teorema fundamental del cálculo	317
Ejercicios.....	318
Aplicaciones de la integral.....	319
Área entre dos curvas	319
Longitud de curva	321
Ejercicios.....	324
Movimiento.....	324
Volúmenes de sólidos de revolución	326
Trabajo.....	328
Ejercicios.....	330
Resumen.....	331
Ejercicios de repaso	332
Módulo 15 Métodos de integración.....	333
Integración por partes.....	334
Integración por partes “rápida”	336
Ejercicios	340
Integración por sustitución trigonométrica	341
Ejercicios.....	344
Integración por fracciones parciales.....	345
Caso 1 El denominador es un producto de factores de grado uno, distintos	345
Caso 2 El denominador es un producto de factores de grado uno, algunos de los cuales se repiten.....	348
Caso 3 En el denominador hay uno o más factores cuadráticos irreducibles distintos	351
Caso 4 En el denominador hay factores cuadráticos irreducibles, algunos de los cuales se repiten	355
Ejercicios.....	358
Integrales con funciones trigonométricas.....	359
Ejercicios.....	362
Resumen.....	362
Ejercicios de repaso	364

Módulo 16 Programas de cálculo simbólico y el cálculo diferencial e integral	365
Scientific Workplace.....	366
Mathematica	369
Maple	371
Apéndice Respuestas de los ejercicios impares.....	375
Funciones	375
<i>Ejercicios de la página 9</i>	<i>375</i>
Funciones reales de variable real	376
<i>Ejercicios de la página 14</i>	<i>376</i>
<i>Ejercicios de la página 20</i>	<i>376</i>
Funciones de uso frecuente	376
<i>Ejercicios de la página 41</i>	<i>376</i>
Operaciones con las funciones.....	377
<i>Ejercicios de la página 49</i>	<i>377</i>
<i>Ejercicios de la página 57</i>	<i>378</i>
<i>Ejercicios de repaso de la página 58</i>	<i>379</i>
Continuidad.....	379
<i>Ejercicios de la página 73</i>	<i>379</i>
<i>Ejercicios de la página 83</i>	<i>379</i>
<i>Ejercicios de la página 86</i>	<i>379</i>
<i>Ejercicios de repaso de la página 87</i>	<i>380</i>
Límites de funciones	380
<i>Ejercicios de la página 109</i>	<i>380</i>
<i>Ejercicios de la página 113</i>	<i>382</i>
<i>Ejercicios de la página 115</i>	<i>382</i>
<i>Ejercicios de la página 117</i>	<i>384</i>
<i>Ejercicios de la página 121</i>	<i>385</i>
<i>Ejercicios de repaso de la página 122</i>	<i>386</i>
Derivada de una función.....	387
<i>Ejercicios de la página 128</i>	<i>387</i>
<i>Ejercicios de la página 136</i>	<i>387</i>
<i>Ejercicios de la página 137</i>	<i>389</i>
<i>Ejercicios de la página 139</i>	<i>389</i>
<i>Ejercicios de la página 146</i>	<i>389</i>
<i>Ejercicios de repaso de la página 148</i>	<i>389</i>
Funciones inversas y sus derivadas	390
<i>Ejercicios de la página 169</i>	<i>390</i>
Máximos y mínimos	390
<i>Ejercicios de la página 182</i>	<i>390</i>
<i>Ejercicios de la página 188</i>	<i>391</i>
<i>Ejercicios de la página 191</i>	<i>392</i>
<i>Ejercicios de la página 194</i>	<i>393</i>
<i>Ejercicios de la página 200</i>	<i>393</i>
<i>Ejercicios de repaso de la página 202</i>	<i>393</i>
Límites infinitos y al infinito	394
<i>Ejercicios de la página 212</i>	<i>394</i>
<i>Ejercicios de la página 218</i>	<i>396</i>
<i>Ejercicios de la página 224</i>	<i>398</i>
<i>Ejercicios de la página 234</i>	<i>399</i>
<i>Ejercicios de repaso de la página 236</i>	<i>400</i>
La gráfica de una función	403
<i>Ejercicios de la página 279</i>	<i>403</i>
<i>Ejercicios de la página 297</i>	<i>404</i>
<i>Ejercicios de repaso de la página 298</i>	<i>406</i>
Logaritmos y exponenciales	408
<i>Ejercicios de la página 244</i>	<i>408</i>
<i>Ejercicios de la página 246</i>	<i>408</i>

<i>Ejercicios de la página 253</i>	408
<i>Ejercicios de la página 255</i>	409
<i>Ejercicios de la página 259</i>	409
<i>Ejercicios de repaso de la página 265</i>	409
La integral	409
<i>Ejercicios de la página 304</i>	409
<i>Ejercicios de la página 308</i>	410
<i>Ejercicios de repaso de la página 309</i>	410
La integral definida	410
<i>Ejercicios de la página 313</i>	410
<i>Ejercicios de la página 318</i>	410
<i>Ejercicios de la página 324</i>	411
<i>Ejercicios de la página 330</i>	412
<i>Ejercicios de repaso de la página 332</i>	412
Métodos de integración	413
<i>Ejercicios de la página 340</i>	413
<i>Ejercicios de la página 344</i>	413
<i>Ejercicios de la página 358</i>	414
<i>Ejercicios de la página 362</i>	415
<i>Ejercicios de repaso de la página 364</i>	415
Índice de materias	416



MÓDULO 1

Funciones

El curso de Cálculo Diferencial e Integral empieza con el estudio de las funciones. Supondremos que los alumnos ya conocen los números reales, las propiedades de las operaciones aritméticas y su interpretación geométrica en la recta. También suponemos que conocen el Plano Cartesiano y la representación geométrica de las ecuaciones de primer grado como rectas en el plano.

El estudio básico de las funciones se lleva a cabo en los primeros cuatro módulos del texto. En este primer módulo se introduce la definición de función como una regla de correspondencia entre elementos de dos conjuntos, que normalmente serán conjuntos de números reales. Esta regla puede darse mediante una o varias fórmulas algebraicas. En los siguientes módulos se estudia la gráfica de una función y se da una clasificación de las funciones más importantes, y se introducen las operaciones entre funciones.

Funciones

En una tienda de abarrotes la ganancia por la venta de cada barra de chocolate es de 40 centavos. Elabora una tabla que nos indique la ganancia obtenida, en pesos, por la venta de 1 hasta 10 barras. ¿Cuál será la ganancia al vender 200 barras de chocolate?

Solución:

Hacemos una tabla de dos columnas; en la primera indicamos el número de barras y en la segunda la cantidad de pesos recibida como ganancia al vender esas barras:

No. de barras	Ganancia en pesos
1	0.40
2	0.80
3	1.20
4	1.60
5	2.00
6	2.40
7	2.80
8	3.20
9	3.60
10	4.00

Al observar la regla que hemos seguido para formar esta tabla, podemos responder que la ganancia por una venta de 200 barras es de 80 pesos.

En general, la ecuación

$$g(x) = 0.40x$$

nos da la ganancia (en pesos), que por razones obvias llamamos g , que se obtiene al vender x barras de chocolate.

En el ejemplo anterior vemos que a cada cantidad de barras vendidas se le asocia una ganancia, de modo tal que a cada cantidad de barras vendidas le corresponde un valor único de la ganancia.

En multitud de situaciones y sucesos de muy diversas características el hombre ha podido percatarse que los valores de una cierta cantidad y dependen, del modo anteriormente descrito, de los valores de otra cantidad x , es decir: a cada valor de x le corresponde un único valor de y .

En uno de los módulos siguientes se darán muchos ejemplos al respecto; por ahora podemos mencionar los siguientes:

- El área y de un cuadrado depende de la longitud x de su lado:

$$y = x^2.$$

- La rapidez y con que un cuerpo recorre una distancia de 10 kilómetros depende del tiempo x que emplea para hacerlo:

$$y = \frac{10}{x}.$$

En todos estos casos decimos que y varía con x y de manera más precisa decimos que y es una función de x . Además, y es entonces llamada la *variable dependiente* y x la *variable independiente*.

Una de nuestras herramientas más poderosas para entender nuestro entorno es la colección de fórmulas que hemos podido establecer para relacionar diversas cantidades que nos interesan en momentos o situaciones particulares.

Lo anterior llevó a introducir la noción matemática de función. De una manera un tanto informal decimos:

Se establece una *función* de un conjunto A en un conjunto B , cuando se da una regla (criterio o ley) a través de la cual **asociamos a cada elemento x de A un único elemento y de B** ; a dicha regla se le denomina la *regla de correspondencia* o *de asociación* de la función y se le denota por una letra, digamos f . Todo esto se resume con la siguiente notación:

$$f : A \rightarrow B.$$

Observamos que para tener una función, debemos contar con 2 conjuntos, que pueden ser iguales entre sí, y una regla de correspondencia con las características antes descritas. Cuando no hay lugar a confusión, nos referimos a una función mediante la letra que usamos para su regla de correspondencia; por ejemplo, en el caso que nos ocupa podemos hablar simplemente de la función f . El conjunto A es llamado el *dominio* de la función y para señalarlo escribimos $Dom f = A$. El conjunto B es llamado el *codominio* o *contradominio* de la función f .

Se acostumbra denotar por $f(x)$ al elemento y de B que está asociado al elemento x de A a través de f . Usamos las siguientes expresiones para referirnos a $f(x)$: f de x , f en x , el valor que toma f en x y la imagen de f en x .

En el ejemplo introductorio tenemos una función cuyo dominio es el conjunto

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\},$$

su codominio es

$$B = \{0.40, 0.80, 1.20, \dots, 4.00\}$$

y la regla de correspondencia f es: a 1 asociarle 0.40, a 2 asociarle 0.80, etcétera. Es decir,

$$f(1) = 0.40, f(2) = 0.80, f(3) = 1.20, \dots, f(10) = 4.00.$$

Cuando se tiene una función $f : A \rightarrow B$ y x en A , también se acostumbra decir que f envía a x en $f(x)$ o f transforma a x en $f(x)$ y escribir $x \rightarrow f(x)$.

La primera de estas dos últimas expresiones nos sugiere usar la siguiente: f envía a los elementos de A en B y nos lleva a considerar que la función es un utensilio que envía, “dispara” o “proyecta” objetos de un conjunto sobre objetos de otro conjunto; esto queda reflejado mediante el siguiente diagrama, mismo que con frecuencia se usa para indicar que hay una función $f: A \rightarrow B$

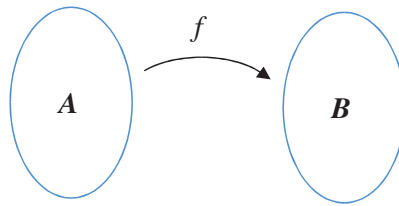


Figura 1-1

La segunda expresión: f transforma a x en $f(x)$, da la idea de que una función actúa a manera de un artefacto que al introducirle un elemento de un conjunto A produce un elemento de un conjunto B , de la misma manera que una máquina transforma los insumos en un producto final. Todas estas imágenes son aceptables si nos ayudan a manejar el concepto de función.

Ejemplos

1. Determinar si el siguiente diagrama corresponde a una función del conjunto A , que tiene tres puntos, en el conjunto de B , que consta de cuatro.

Solución:

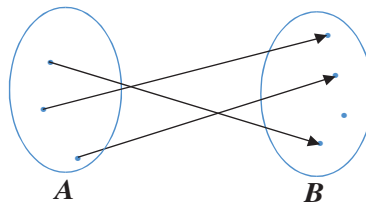


Figura 1-2

Como a cada elemento de A se le asocia un único elemento de B , entonces el diagrama sí corresponde a una función. El hecho de que hay un elemento en B que no es el asociado de un punto de A no contradice la definición, pues en ésta no se exige que cada elemento de B sea el asociado de un elemento de A .

2. Determinar si el siguiente diagrama corresponde a una función.

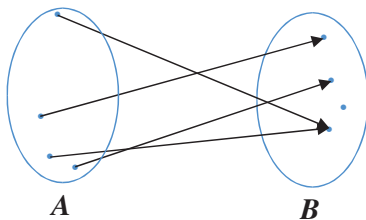


Figura 1-3

Solución:

Como cada elemento del conjunto A , compuesto por 4 puntos, tiene asociado un único elemento de B , entonces el diagrama sí corresponde a una función.

En este ejemplo sucede que dos elementos de A tienen asociado el mismo elemento de B ,

3. Determinar si el siguiente diagrama corresponde a una función.

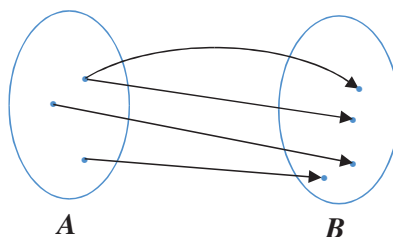


Figura 1-4

Solución:

Puesto que hay un elemento del dominio que tiene asociado a dos elementos del contradominio, distintos entre sí, el diagrama no corresponde a una función.

Para cualquier función $f: A \rightarrow B$, definimos la *imagen* o *rango de la función* f como la colección de todos los elementos $f(x)$, con $x \in A$, es decir, todos aquellos elementos de B que fueron los asociados a los elementos de A . Este conjunto se denota por $f(A)$ o bien $\text{Im } f$.

Es claro que $\text{Im } f$ es un subconjunto del codominio B y puede suceder que $\text{Im } f$ sea un subconjunto propio del codominio, es decir, que sea un subconjunto del codominio que no coincida con él, lo cual se denota por $\text{Im } f \subsetneq B$; tal es el caso para la función representada en la siguiente figura:

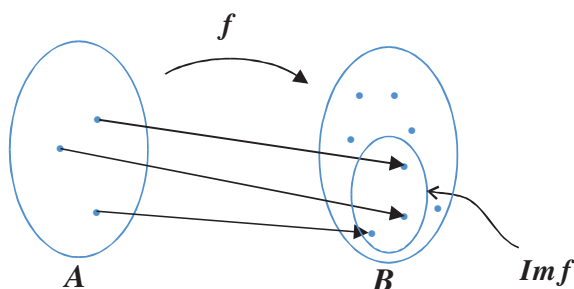


Figura 1-5

Aquí, $\text{Im } f$ es un subconjunto propio del codominio.

Modos de expresar la regla de correspondencia de una función

1. *Modo Tabular.* Este es el modo más explícito; en él se especifica individualmente el asociado de cada elemento de A . El nombre de modo tabular, se justifica por lo que se dice en el siguiente ejemplo, que nos recuerda al ejemplo introductorio.

Sea $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{-1, 0, 1, 3, 6, 7, 9, 13\}$ la función cuya regla de correspondencia es la que hace las siguientes asociaciones:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 1 \\ 2 & \rightarrow & 3 \\ 3 & \rightarrow & 6 \end{array}$$

Lo anterior equivale a dar la siguiente tabla:

x	$f(x)$
1	1
2	3
3	6

En este ejemplo, el dominio es $A = \{1, 2, 3\}$ y el codominio es $B = \{-1, 0, 1, 3, 6, 7, 9, 13\}$.

Observamos:

- En la primera columna deben aparecer, una sola vez, todos los elementos del dominio, pero en la segunda columna no es necesario que estén todos los elementos de B . Esta situación queda representada en el diagrama.
- Los elementos de la segunda columna son aquellos elementos de B que fueron asociados a algún elemento x de A . Recordamos que dichos elementos de B constituyen el conjunto $\text{Im } f$ llamado la imagen o rango de la función f . En este caso $\text{Im } f = \{1, 3, 6\}$.
- En general, al dar una tabla de dos columnas, donde en la primera de ellas no hay elementos repetidos, se establece una función tal que: su dominio está formado por los elementos que aparecen en la primera columna; su imagen es el conjunto formado por los elementos de la segunda y la regla de asociación es la que relaciona a cada elemento x de la primera columna con el elemento $f(x)$ que está en el mismo renglón. En el ejemplo anterior tenemos: $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ y $f(3) = 6$.

Ejemplo

Decidir si la tabla determina una función y de ser así, establecer su dominio, imagen y regla de asociación.

x	y
-9	6
-5	4
-2	3
2	4
6	3

Solución:

Como en la primera columna no hay repeticiones, entonces sí determina una función.

El dominio de la función es:

$$A = \{-9, -5, -2, 2, 6\}.$$

El rango o imagen es:

$$B = \{3, 4, 6\}$$

y la regla de correspondencia f es la que hace las siguientes asociaciones:

$$\begin{array}{ccc} -9 & \rightarrow & 6 \\ -5 & \rightarrow & 4 \\ -2 & \rightarrow & 3 \\ 2 & \rightarrow & 4 \\ 6 & \rightarrow & 3 \end{array}$$

2. *Mediante una fórmula.* En este modo, la regla de correspondencia se expresa mediante una fórmula que pueda ser evaluada en cada elemento x del dominio, de manera que esa evaluación produzca un resultado único $y(= f(x))$.

El siguiente es un ejemplo de este modo de presentar la regla de correspondencia.

Consideremos la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, cuya regla de correspondencia es $y = 2x$. Es decir, mediante la fórmula establecemos la regla consistente en asociar a cada natural x su doble $2x$. Así, $f(x) = 2x$ para cada natural x , en particular: $f(1) = 2$, $f(7) = 14$, etcétera.

En este ejemplo, el dominio y codominio de la función es el mismo conjunto: el de los números naturales; en tanto que, la imagen es el conjunto formado por los pares positivos.

Es claro que para esta función es más cómodo este modo de dar la regla de asociación que el tabular.

Ejemplo

Decidir si la fórmula $y = x + 1$ determina una función de los reales en sí mismos.

Solución:

Al evaluar el lado derecho en un real cualquiera x obtenemos un único número real $x + 1$.

Por tanto, tenemos que la fórmula sí determina una función de los números reales en sí mismos, y que según ella a cada real x se le asocia el real $f(x) = x + 1$.

Por ejemplo, $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + 1$, etcétera.

3. *Mediante una combinación de fórmulas.* Podemos partir al dominio en varios pedazos, ajenos entre sí, y usar en cada uno de ellos una fórmula para obtener los valores asociados a sus elementos.

Por ejemplo, el conjunto de equipos participantes en la Primera División de la Liga Mexicana de Fútbol está dividido en 3, que llamamos grupos: 1, 2 y 3. La función que asocia a cada equipo su número de grupo se escribe del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{\text{América, Atlante, Morelia, Sinaloa, UAG, UNAM}\} \\ 2 & \text{si } x \in \{\text{Atlas, C. Azul, Guadalajara, Puebla, Toluca, UANL}\} \\ 3 & \text{si } x \in \{\text{Chiapas, Monterrey, Necaxa, Pachuca, Santos, Veracruz}\}. \end{cases}$$

Aquí usamos las fórmulas: $y = 1$, $y = 2$ y $y = 3$ según el pedazo del dominio que estemos considerando.

Ejemplo

Encontrar las imágenes correspondientes a los valores $x = -4$, $x = 2$ y $x = 7$ para la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \in [-6, 2) \\ 2x & \text{si } x \in [2, 7]. \end{cases}$$

En este caso el dominio está compuesto por los conjuntos $[-6, 2)$ y $[2, 7]$; es decir, el dominio es el intervalo $[-6, 7] = [-6, 2) \cup [2, 7]$. En el pedazo $[-6, 2)$ se usa la fórmula $y = -x + 1$ y para la porción $[2, 7]$ se usa $y = 2x$.

Solución:

- $-4 \in [-6, 2)$ por tanto, usamos la fórmula $f(x) = -x + 1$:

$$f(-4) = -(-4) + 1 = 5$$

- $2 \in [2, 7]$ por tanto, usamos la fórmula $f(x) = 2x$:

$$f(2) = 2(2) = 4.$$

- $7 \in [2, 7]$, por tanto usamos la fórmula $f(x) = 2x$:

$$f(7) = 2(7) = 14.$$

A toda función cuya regla de asociación esté definida según este tercer modo se le denomina *función combinada* o *función a pedazos*.

Igualdad de funciones

Decimos que dos funciones f y g son **iguales** si:

- i) Tienen el mismo dominio.
- ii) Tienen la misma regla de correspondencia, es decir,
 $f(x) = g(x)$
 para todo x en el dominio.

Ejemplos

- Determinar si las funciones f y g son iguales, si

$$f(x) = x; \text{ Dom } f = [0, \infty), \quad g(x) = \sqrt{x^2}; \text{ Dom } g = [0, \infty).$$

Solución:

Las funciones tienen el mismo dominio, entonces sólo debemos ver si la regla de correspondencia es la misma.

Para $x \geq 0$ es lo mismo $\sqrt{x^2}$ que x entonces

$$g(x) = \sqrt{x^2} = x, \quad \text{ya que } x \geq 0.$$

Por tanto, las funciones son iguales.

Hacemos dos observaciones respecto a este ejercicio.

- Para $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$, ya que con $\sqrt{}$ nos referimos a la raíz cuadrada no negativa. Así $\sqrt{(-3)^2} = -(-3) = 3$.
- Es de resaltar que si definimos $f(x) = x$, con $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, entonces aunque la regla de asociación de f no cambió, tenemos que f y g no son iguales, ya que sus dominios no coinciden.

2. Determinar si las funciones f y g son iguales. Si

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}; \text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad g(x) = x+2; \text{Dom } g = \mathbb{R}.$$

Solución:

Como los dominios de las funciones son distintos entonces las funciones no son iguales, no obstante que

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2,$$

para todo x donde ambas funciones están definidas, o sea si $x \neq 2$.

Ejercicios

En cada caso determina el dominio, la imagen y la regla de correspondencia.

1.

x	$f(x)$
-4	1
0	2
2	3

2.

x	$f(x)$
-2	-10
-3	-7
-8	-15

3.

x	$f(x)$
6	-9
8	2.5
10	0.8

4.

x	$f(x)$
1	2
2	-5
3	0
4	5
5	-6

5.

x	$f(x)$
-3	11
-1	21
2	-15
12	-6
25	11

6.

x	$f(x)$
-9	-17
-7	-13
-5	-9
-3	-5
-1	-1

En cada caso evalúa la función en los puntos dados.

7. $f(x) = 5x + 3$; $x = -9$, $x = \pi$, $x = 5$, $x = \frac{1}{2}$
8. $f(x) = x^2 - 1$; $x = -3$, $x = -1$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$
9. $f(x) = \sqrt{x+3}$; $x = -2$, $x = -\frac{1}{3}$, $x = 0$, $x = -3$
10. $f(x) = \frac{1}{x}$; $x = -\frac{1}{5}$, $x = -2$, $x = 8$, $x = \frac{5}{9}$
11. $f(x) = x^2 + 6x + 9$; $x = -4$, $x = -1$, $x = 3$, $x = 7$
12. $f(x) = \frac{x-6}{x+2}$; $x = -10$, $x = 6$, $x = 2$, $x = \sqrt{3}$
13. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (-8, 2) \\ 3x+2 & \text{si } x \in [2, 12] \end{cases}$; $x = -6.25$, $x = 0$, $x = 2$, $x = 11$
14. $f(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } x \in [-4, -1] \\ 8x & \text{si } x \in (-1, 3] \end{cases}$; $x = -2$, $x = -0.5$, $x = 1$, $x = \frac{5}{2}$
15. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-3.5, 2.5) \\ 7x-9 & \text{si } x \in (6, 20] \end{cases}$; $x = -3.5$, $x = -2$, $x = 12$, $x = 18$
16. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 2 & \text{si } x \in (15, 64] \\ x^2 - 8 & \text{si } x \in (10, 15] \end{cases}$; $x = 11$, $x = 15$, $x = 36$, $x = 49$

En cada caso determina si las funciones dadas son iguales.

17. $f(x) = \sqrt{x^2 + 10x + 25}$ $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $g(x) = x + 5$, $\text{Dom } g = \mathbb{R}$
18. $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$, $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$; $g(x) = x - 4$, $\text{Dom } g = \mathbb{R}$
19. $f(x) = \frac{x+12}{x^2 - 144}$, $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-12, 12\}$; $g(x) = \frac{1}{x-12}$, $\text{Dom } g = \mathbb{R} \setminus \{-12, 12\}$
20. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $g(x) = |x - 3|$, $\text{Dom } g = \mathbb{R}$