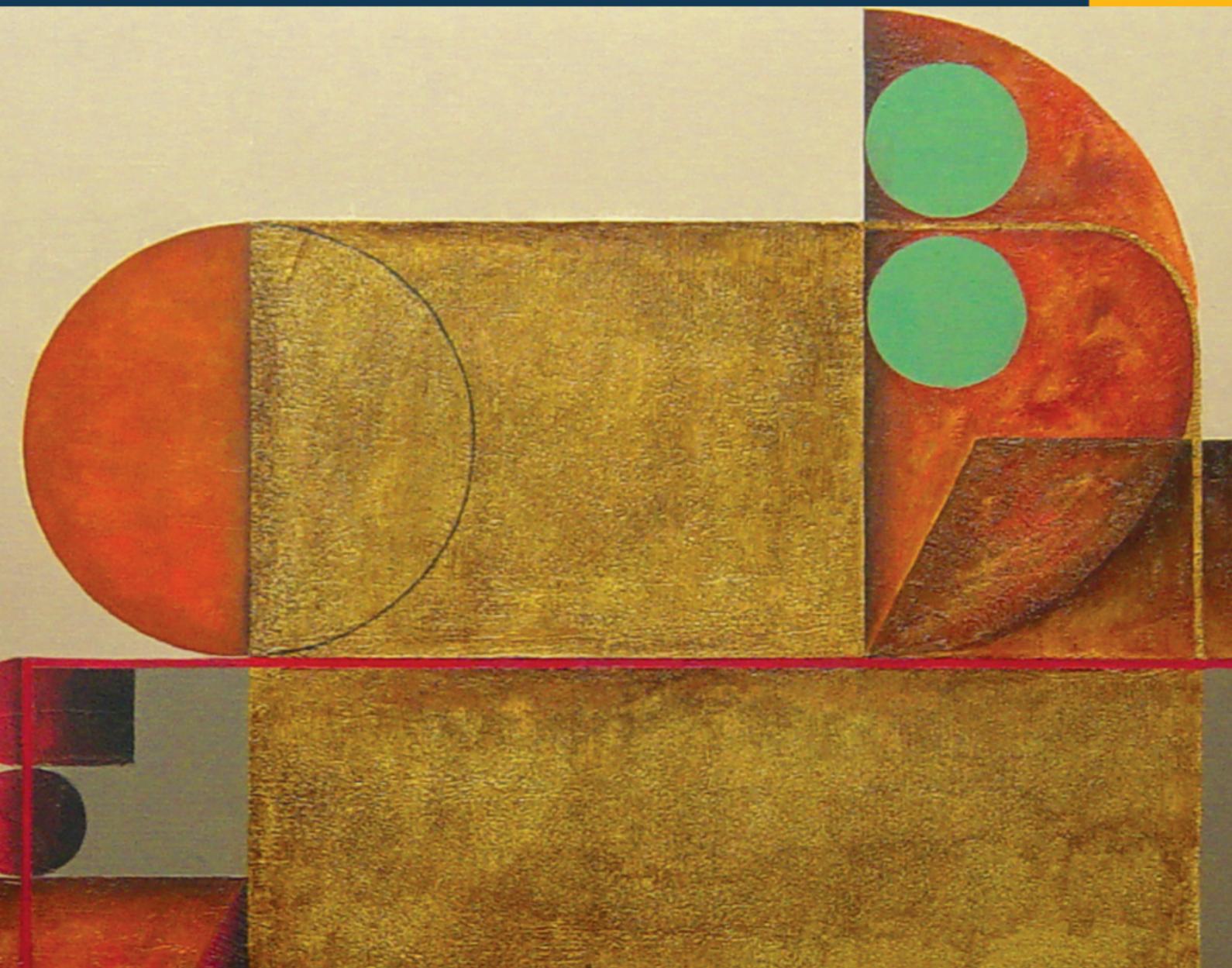


CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES DE MATEMÁTICAS TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA



Elena de Oteyza (Coordinadora)



COLECCIÓN CONOCIMIENTOS FUNDAMENTALES



Conocimientos Fundamentales de Matemáticas

Trigonometría y Geometría Analítica



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Dr. Juan Ramón de la Fuente

RECTOR

Lic. Enrique del Val Blanco

SECRETARIO GENERAL

Mtro. Daniel Barrera Pérez

SECRETARIO ADMINISTRATIVO

Dra. Rosaura Ruiz Gutiérrez

SECRETARIA DE DESARROLLO INSTITUCIONAL

Mtro. José Antonio Vela Capdevila

SECRETARIO DE SERVICIOS A LA COMUNIDAD

Mtro. Jorge Islas López

ABOGADO GENERAL

Mtra. María de Lourdes Sánchez Obregón

DIRECTORA GENERAL DE LA ESCUELA

NACIONAL PREPARATORIA

Mtro. Rito Terán Olguín

DIRECTOR GENERAL DEL COLEGIO

DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Dra. Lidia Ortega González

COORDINADORA DEL CONSEJO ACADÉMICO

DEL BACHILLERATO

Dr. Alejandro Pisanty Baruch

DIRECTOR GENERAL DE SERVICIOS

DE CÓMPUTO ACADÉMICO

Dr. Francisco Cervantes Pérez

COORDINADOR DE UNIVERSIDAD

ABIERTA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA

Lic. Néstor Martínez Cristo

DIRECTOR GENERAL DE COMUNICACIÓN SOCIAL

Colección Conocimientos Fundamentales

Esta colección es parte de un programa de la UNAM orientado
a la producción de libros y materiales digitales para el bachillerato.

Colección Conocimientos Fundamentales

Conocimientos Fundamentales de Matemáticas

Trigonometría y Geometría Analítica

M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza
(Coordinadora)

M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza
Profesora de la Facultad de Ciencias, UNAM

M. en C. Emma Lam Osnaya
Profesora de la Facultad de Ciencias, UNAM

Dr. Carlos Hernández Garciadiego
Investigador del Instituto de Matemáticas, UNAM

M. en C. Ángel Manuel Carrillo Hoyo
Investigador del Instituto de Matemáticas, UNAM

Dr. Arturo Ramírez Flores
CIMAT Guanajuato



Universidad Nacional Autónoma de México
México, 2007



México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica	
DE OTEYZA, ELENA <i>et al.</i>	
Conocimientos Fundamentales de Matemáticas.	
Trigonometría y Geometría Analítica	
PEARSON EDUCACIÓN, México, 2007	
ISBN: 978-970-26-1131-8	
Área: Bachillerato	
Formato: 21 × 27 cm	Páginas: 512

Programa Conocimientos Fundamentales para la Enseñanza Media Superior

Coordinación general: Dra. Rosaura Ruiz Gutiérrez y Dr. Arturo Argueta Villamar
 Coordinación operativa: Dr. Alfredo Arnaud Bobadilla
 Coordinación editorial: Rosanela Álvarez Ruiz

La Coordinación agradece la colaboración de la Escuela Nacional Preparatoria, el Colegio de Ciencias y Humanidades, el Consejo Académico del Bachillerato, la Facultad de Filosofía y Letras, la Facultad de Ciencias, la Facultad de Química, el Instituto de Ecología, el Instituto de Geografía, el Instituto de Investigaciones Filosóficas, el Instituto de Matemáticas, el Instituto de Física, el Instituto de Investigaciones en Materiales, el Centro de Ciencias Físicas, la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico, la Coordinación de Universidad Abierta y Educación a Distancia, la Dirección General de Actividades Cinematográficas, la Dirección General de Divulgación de la Ciencia, la Dirección General de Televisión Universitaria y la Dirección de Literatura. Se agradece también a la Academia Mexicana de Ciencias.

Portada: Manuel Felguerez. Sin título, óleo sobre tela, 35 × 45 cm, 1976.

Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Trigonometría y Geometría Analítica

1^a edición, 2007

Colección Conocimientos Fundamentales

D. R. © UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Cd. Universitaria, 04510, México, D. F.

Secretaría de Desarrollo Institucional

ISBN 978-970-32-4639-7

PRIMERA EDICIÓN, 2007

D.R. © 2007 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Atlacomulco No. 500 – 5° piso

Col. Industrial Atoto

53519, Naucalpan de Juárez, Edo. de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

ISBN 10: 970-26-1131-8

ISBN 13: 978-970-26-1131-8

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 10 09 08 07



Presentación

El saber, entendido como fuerza que impulsa de manera determinante al desarrollo, tanto individual como social, constituye una condición necesaria para el crecimiento, la democracia, la equidad y la libertad.

En el contexto de la sociedad del conocimiento, la formación media superior se ha convertido en un tema de atención prioritaria para las instituciones educativas. Sus nuevas tendencias, oportunidades y posibilidades, su función de enlace entre los niveles básico y profesional y su situación estratégica en el proceso formativo, dotan al bachillerato de un gran potencial.

El libro que tienes en tus manos es producto de un muy estimable esfuerzo hecho por la Universidad Nacional Autónoma de México para fortalecer al bachillerato. Forma parte de la **Colección Conocimientos Fundamentales** para la enseñanza media superior, concebida bajo la visión de que los acelerados cambios y transformaciones de las últimas décadas en los diversos campos del saber y del quehacer humano, deben reflejarse en los contenidos educativos del siglo que inicia. En tal sentido, este ciclo de estudios está siendo objeto de un profundo análisis.

Entre los aspectos que, sin duda, impulsarán al bachillerato, están su articulación orgánica con las etapas educativas posteriores; el establecimiento de estrategias de atención a requerimientos pedagógicos específicos; la modificación curricular sustentada en el perfil de egreso y en los conocimientos relevantes y pertinentes que requiere el estudiante; el mejoramiento de la docencia, y la incorporación de nuevas tecnologías a la enseñanza-aprendizaje en esta etapa.

Con base en lo anterior, la Secretaría de Desarrollo Institucional, en colaboración con la Escuela Nacional Preparatoria, el Colegio de Ciencias y Humanidades y el Consejo Académico del Bachillerato de la UNAM, ha emprendido un programa conducente a replantear los contenidos temáticos de las disciplinas que se imparten en este nivel de estudios.

Los libros y materiales de la **Colección Conocimientos Fundamentales** para la enseñanza media superior son el punto de partida para establecer los cimientos de una formación que, efectivamente, te proporcione una cultura general interdisciplinaria y de capacidades específicas para que puedas responder a las exigencias de un entorno cada vez más complejo y demandante. Dichos conocimientos, además de las habilidades y valores correspondientes, deben prepararte también para el aprendizaje a lo largo de tu vida.

La Colección cuenta con la participación de destacados académicos de la Universidad, en el marco de un programa institucional destinado a rendir sus mejores frutos en beneficio de los jóvenes del bachillerato en México y en América Latina.

*Dr. Juan Ramón de la Fuente
Rector de la Universidad Nacional Autónoma de México*

Prefacio

La Secretaría de Desarrollo Institucional, en colaboración con la Escuela Nacional Preparatoria, el Colegio de Ciencias y Humanidades y el Consejo Académico del Bachillerato de la UNAM, emprendió la tarea de reflexionar sobre los contenidos temáticos de las disciplinas que se imparten en el bachillerato, bajo la premisa de que la enseñanza media superior tiene como objetivos principales la formación de estudiantes que continúen sus estudios en la licenciatura y el posgrado, con posibilidades reales de incorporarse a la vida laboral, con un claro compromiso social.

Las disciplinas elegidas para trabajar en una primera etapa fueron: biología, filosofía, física, geografía, matemáticas, literatura y química. Se formaron grupos de trabajo integrados por profesores del bachillerato, la licenciatura y el posgrado, que definieron los conocimientos fundamentales de cada disciplina, en función de su desarrollo reciente, de su pertinencia en el marco de la enseñanza media superior y del impulso a la interdisciplina.

La definición de los conocimientos fundamentales tiene como fin el determinar los saberes básicos e imprescindibles con que los estudiantes deben contar al término del ciclo del bachillerato y proporcionar a los alumnos una cultura general de la disciplina, que les permita estar preparados para incursionar en nuevos espacios del saber.

Una vez establecidos tales conocimientos, se integraron grupos de trabajo más amplios para elaborar los contenidos de los libros, de los discos compactos y de la página web, que son los tres materiales de apoyo a tu formación que incluye este programa. Éstos se insertan en el marco de la **Colección Conocimientos Fundamentales** para que puedas usarlos con la orientación y apoyo de tus profesores.

La definición y la producción de los materiales de esta Colección contó con la amplia participación de la Escuela Nacional Preparatoria, el Colegio de Ciencias y Humanidades, el Consejo Académico del Bachillerato, la Facultad de Filosofía y Letras, la Facultad de Ciencias, la Facultad de Química, el Instituto de Ecología, el Instituto de Geografía, el Instituto de Investigaciones Filosóficas, el Instituto de Matemáticas, el Instituto de Física, el Instituto de Investigaciones en Materiales, el Centro de Ciencias Físicas, la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico, la Coordinación de Universidad Abierta y Educación a Distancia, la Dirección General de Actividades Cinematográficas, la Dirección General de Divulgación de la Ciencia, la Dirección General de Televisión Universitaria y la Dirección de Literatura. También contribuyó en la tarea un selecto grupo de miembros de la Academia Mexicana de Ciencias, quienes hicieron sugerencias para mejorar los materiales. A todos ellos, nuestro reconocimiento y gratitud.

El Programa de Fortalecimiento del Bachillerato, del que forma parte la **Colección Conocimientos Fundamentales** es una iniciativa de la UNAM destinada a apoyar y fortalecer los estudios de bachillerato en lengua española.

Con esta primera serie de libros y materiales para siete disciplinas, dirigidos a los maestros y estudiantes del nivel medio superior, nuestra Universidad inicia esta Colección que habrá de enriquecerse con una serie de nuevos títulos, realizados con la calidad y el profesionalismo propios de nuestra casa de estudios.

*Dra. Rosaura Ruiz Gutiérrez
Secretaria de Desarrollo Institucional*

Índice

Presentación.....	V
Prefacio.....	VII
Módulo 1 La trigonometría	1
Los ángulos y su medición	2
La medida circular o en radianes	4
<i>Ejercicios</i>	6
Relaciones básicas de la trigonometría	7
<i>Ejercicios</i>	10
Funciones trigonométricas para ángulos agudos.....	10
<i>Solución de triángulos rectángulos</i>	14
<i>Ejercicios</i>	18
Las funciones trigonométricas y el círculo unitario	20
<i>Extensión del seno, el coseno y la tangente para ángulos mayores de 90°</i>	20
<i>Las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante</i>	23
<i>Ejercicios</i>	24
<i>Ángulos mayores de 360° y ángulos negativos</i>	24
<i>Ángulos negativos</i>	26
Identidades trigonométricas	27
<i>Identidades pitagóricas</i>	27
<i>Ejercicios</i>	30
<i>Identidades que relacionan θ con $-\theta$</i>	30
<i>Identidades para la suma de dos ángulos</i>	31
<i>Ejercicios</i>	35
Ley de los senos	36
<i>Ley de los senos</i>	37
<i>Solución de triángulos (continuación)</i>	37
<i>Ejercicios</i>	40
Ley de los cosenos.....	41
<i>Ley de los cosenos</i>	42
<i>Solución de triángulos (continuación)</i>	42
<i>Ley de las tangentes</i>	44
<i>Ejercicios</i>	44
Aplicación de la trigonometría para el cálculo del área de un triángulo	46
<i>Área de un triángulo conociendo dos lados y el ángulo entre ellos</i>	46
<i>Área de un triángulo conociendo los tres lados</i>	47
<i>Ejercicios</i>	48
Resumen de identidades trigonométricas	49
<i>Ejercicios de repaso</i>	50
Apéndice	52
<i>Ley de los senos</i>	52
<i>Ley de los cosenos</i>	53
<i>Ley de las tangentes</i>	54

Módulo 2 El plano euclíadiano	55
Los ejes coordenados	56
<i>El plano cartesiano</i>	56
<i>Sistema de coordenadas</i>	57
Longitud de un segmento	60
<i>Distancia entre dos puntos</i>	60
<i>Ejercicios</i>	63
Segmentos dirigidos	64
División de un segmento	67
<i>Punto medio de un segmento</i>	67
<i>Razón (aritmética) de segmentos</i>	70
<i>Razón algebraica de segmentos dirigidos</i>	73
<i>División de un segmento en una razón dada</i>	75
<i>Ejercicios</i>	81
<i>Resumen</i>	82
<i>Ejercicios de repaso</i>	82
Ejercicios con GeoLab	84
Apéndice	85
Módulo 3 La línea recta	91
La línea recta	92
La pendiente de una recta	92
<i>Ángulo de una recta con el eje X</i>	99
<i>Ejercicios</i>	103
Ecuación de la recta cuando se conocen la pendiente y un punto de ella	104
<i>Ejercicios</i>	110
Ecuación de la recta conociendo dos puntos de ella	110
<i>Rectas verticales</i>	113
<i>Ejercicios</i>	114
Forma general de la ecuación de la recta	115
<i>Ejercicios</i>	118
Forma simétrica de la ecuación de la recta	119
<i>Ejercicios</i>	121
Intersección de rectas	122
<i>Ejercicios</i>	125
<i>Ángulo entre dos rectas</i>	126
<i>Ejercicios</i>	132
Paralelismo y perpendicularidad	132
<i>Ejercicios</i>	136
Desigualdades y regiones del plano	138
<i>Rectas verticales</i>	142
<i>Punto de equilibrio</i>	143
<i>Ejercicios</i>	148
Distancia de un punto a una recta	150
<i>Distancia entre dos rectas paralelas</i>	152
<i>Ejercicios</i>	153
Bisectriz de un ángulo	154
<i>Ejercicios</i>	156
Lugares geométricos	157
<i>Ejercicios</i>	161
<i>Resumen</i>	161
<i>Ejercicios de repaso</i>	162
Ejercicios con GeoLab	164
Apéndice	166

Módulo 4 Las cónicas	169
Las secciones cónicas	170
<i>El círculo</i>	172
<i>La parábola</i>	173
<i>La elipse</i>	174
<i>La hipérbola</i>	175
Traslaciones de los ejes	177
<i>Ejercicios</i>	185
<i>Resumen</i>	186
Ejercicios con GeoLab	186
Apéndice	
<i>Equivalencia entre las definiciones de las cónicas mediante cortes de un cono o un cilindro, por un plano, y las definiciones en términos de distancias</i>	187
Módulo 5 El círculo	191
Definición del círculo	193
Ecuación del círculo con centro en el origen	193
<i>Ejercicios</i>	197
Ecuación general del círculo	198
<i>Ejercicios</i>	200
Intersección de un círculo con una recta	201
<i>Recta tangente a un círculo</i>	205
Intersección de dos círculos	208
<i>Ejercicios</i>	215
El círculo que pasa por tres puntos	216
<i>Ejercicios</i>	220
Las desigualdades y los círculos	220
<i>Ejercicios</i>	224
Lugares geométricos	224
<i>Ejercicios</i>	226
<i>Resumen</i>	227
<i>Ejercicios de repaso</i>	227
Ejercicios con GeoLab	229
Módulo 6 La parábola	233
Definición de la parábola	234
Las parábolas con vértice en el origen	235
<i>Parábolas verticales</i>	235
<i>Parábolas horizontales</i>	237
<i>Ejercicios</i>	241
Construcción de la parábola	242
<i>Sugerencias para trazar una parábola conociendo su ecuación</i>	242
<i>Construcción de la parábola con el uso de instrumentos</i>	244
<i>Construcción con regla y compás</i>	245
<i>Construcción con hilo y escuadra</i>	246
<i>Construcción con papel doblado</i>	246
Algunas aplicaciones de la parábola	247
Antenas parabólicas	248
<i>Puentes colgantes</i>	249
<i>Ejercicios</i>	250
La forma estándar de la ecuación de la parábola	251
<i>Tiro parabólico</i>	257
<i>Ejercicios</i>	259

Las funciones cuadráticas y las paráolas	260
<i>Ejercicios</i>	264
Desigualdades y la parábola	265
<i>Ejercicios</i>	270
La recta tangente a la parábola	272
<i>*Uso del cálculo diferencial para encontrar la tangente a la parábola</i>	276
<i>Ejercicios</i>	278
Lugares geométricos	278
<i>Ejercicios</i>	281
<i>Resumen</i>	281
<i>Ejercicios de repaso</i>	282
Ejercicios con GeoLab	284
Apéndice	285
<i>La propiedad de reflexión de la parábola</i>	285
<i>Los puentes colgantes</i>	286
<i>El tiro parabólico</i>	288
Módulo 7 La elipse	291
Definición de la elipse	292
Elipse con centro en el origen	293
<i>Elipse horizontal</i>	293
<i>Elipse vertical</i>	296
<i>Ejercicios</i>	298
Construcción de la elipse	299
<i>Sugerencias para trazar una elipse</i>	300
<i>Construcción de la elipse con el uso de instrumentos</i>	302
<i>Construcción con regla y compás</i>	302
<i>Construcción con hilo</i>	303
<i>Construcción con papel doblado</i>	304
La excentricidad de la elipse	305
<i>Ejercicios</i>	307
Algunas aplicaciones de la elipse	308
<i>Propiedad de reflexión de la elipse</i>	308
<i>Astronomía</i>	308
<i>Ejercicios</i>	310
Elipses con eje focal paralelo a un eje cartesiano	311
<i>Ejercicios</i>	316
Otra interpretación de la definición de la elipse	317
<i>Ejercicios</i>	320
Desigualdades y la elipse	320
<i>Ejercicios</i>	325
Recta tangente a una elipse	325
<i>Uso del cálculo diferencial para encontrar la tangente a la elipse</i>	328
<i>Directrices de la elipse</i>	330
<i>Ejercicios</i>	332
Lugares geométricos	333
<i>Ejercicios</i>	335
<i>Resumen</i>	336
<i>Ejercicios de repaso</i>	337
Ejercicios con GeoLab	338
Apéndice	340
<i>Demostración de la propiedad de reflexión de la elipse</i>	340
Módulo 8 La hipérbola	341
Definición de la hipérbola	342
La hipérbola con centro en el origen	343
<i>Hipérbola horizontal</i>	343

<i>Hipérbola vertical</i>	347
<i>Ejercicios</i>	349
Las asíntotas de la hipérbola	350
La excentricidad de la hipérbola	354
<i>Ejercicios</i>	356
Construcción de la hipérbola	356
<i>Sugerencias para trazar una hipérbola</i>	356
<i>Construcción con regla y compás</i>	359
<i>Construcción con hilo</i>	360
<i>Construcción con papel doblado</i>	361
Aplicaciones de la hipérbola	362
<i>Propiedad de reflexión de la hipérbola</i>	362
<i>Sistema de navegación LORAN</i>	363
<i>Ejercicios</i>	364
Hipérbolas con eje focal paralelo a un eje cartesiano	365
<i>Directrices de la hipérbola</i>	369
<i>Ejercicios</i>	371
Otra interpretación de la definición de la hipérbola	373
<i>Ejercicios</i>	375
Desigualdades y la hipérbola	376
<i>Ejercicios</i>	381
Recta tangente a una hipérbola	381
Uso del cálculo diferencial para encontrar la recta tangente a la hipérbola	385
<i>Ejercicios</i>	386
Lugares geométricos	386
<i>Ejercicios</i>	391
<i>Resumen</i>	391
<i>Ejercicios de repaso</i>	393
Ejercicios con GeoLab	395
Apéndice	396
<i>Demostración de la propiedad de reflexión de la hipérbola</i>	396
Módulo 9 La ecuación general de segundo grado	397
La excentricidad de las cónicas	398
Transformación de la ecuación general por traslación de los ejes	404
<i>Ejercicios</i>	411
Transformación de la ecuación general por rotación de los ejes	412
<i>Ejercicios</i>	420
Ecuación general de las cónicas	421
<i>Eliminación del término xy</i>	424
Discriminante de la ecuación general	428
<i>Ejercicios</i>	430
La recta tangente a una cónica	431
<i>Ejercicios</i>	436
Lugares geométricos	436
<i>Ejercicios</i>	438
<i>Resumen</i>	438
<i>Ejercicios de repaso</i>	439
Ejercicios con GeoLab	439
Apéndice A Respuestas de los ejercicios impares	441
Trigonometría	442
<i>Ejercicios de la página 6</i>	442
<i>Ejercicios de la página 10</i>	442
<i>Ejercicios de la página 18</i>	442
<i>Ejercicios de la página 24</i>	442
<i>Ejercicios de la página 30</i>	443

<i>Ejercicios de la página 35</i>	443
<i>Ejercicios de la página 40</i>	443
<i>Ejercicios de la página 44</i>	443
<i>Ejercicios de la página 48</i>	443
<i>Ejercicios de repaso de la página 50</i>	443
El plano euclíadiano	443
<i>Ejercicios de la página 63</i>	443
<i>Ejercicios de la página 81</i>	444
<i>Ejercicios de repaso de la página 82</i>	444
La línea recta	444
<i>Ejercicios de la página 103</i>	444
<i>Ejercicios de la página 110</i>	445
<i>Ejercicios de la página 114</i>	445
<i>Ejercicios de la página 118</i>	446
<i>Ejercicios de la página 121</i>	446
<i>Ejercicios de la página 125</i>	447
<i>Ejercicios de la página 132</i>	447
<i>Ejercicios de la página 136</i>	447
<i>Ejercicios de la página 148</i>	448
<i>Ejercicios de la página 156</i>	448
<i>Ejercicios de la página 156</i>	448
<i>Ejercicios de la página 161</i>	449
<i>Ejercicios de repaso de la página 162</i>	449
Las cónicas	450
<i>Ejercicios de la página 185</i>	450
El círculo	451
<i>Ejercicios de la página 197</i>	451
<i>Ejercicios de la página 200</i>	451
<i>Ejercicios de la página 215</i>	452
<i>Ejercicios de la página 220</i>	453
<i>Ejercicios de la página 224</i>	453
<i>Ejercicios de la página 226</i>	454
<i>Ejercicios de repaso de la página 227</i>	454
La parábola	455
<i>Ejercicios de la página 241</i>	455
<i>Ejercicios de la página 250</i>	456
<i>Ejercicios de la página 259</i>	457
<i>Ejercicios de la página 264</i>	460
<i>Ejercicios de la página 270</i>	460
<i>Ejercicios de la página 278</i>	461
<i>Ejercicios de la página 281</i>	462
<i>Ejercicios de repaso de la página 282</i>	462
La elipse	464
<i>Ejercicios de la página 298</i>	464
<i>Ejercicios de la página 307</i>	466
<i>Ejercicios de la página 310</i>	466
<i>Ejercicios de la página 316</i>	467
<i>Ejercicios de la página 320</i>	469
<i>Ejercicios de la página 325</i>	470
<i>Ejercicios de la página 332</i>	470
<i>Ejercicios de la página 335</i>	471
<i>Ejercicios de repaso de la página 337</i>	471
La hipérbola	473
<i>Ejercicios de la página 349</i>	473
<i>Ejercicios de la página 356</i>	475
<i>Ejercicios de la página 364</i>	475
<i>Ejercicios de la página 371</i>	476
<i>Ejercicios de la página 375</i>	478
<i>Ejercicios de la página 381</i>	479

<i>Ejercicios de la página 386</i>	480
<i>Ejercicios de la página 391</i>	481
<i>Ejercicios de repaso de la página 393</i>	481
La ecuación general de segundo grado	483
<i>Ejercicios de la página 411</i>	483
<i>Ejercicios de la página 420</i>	483
<i>Ejercicios de la página 430</i>	485
<i>Ejercicios de la página 436</i>	485
<i>Ejercicios de la página 438</i>	486
<i>Ejercicios de la página 439</i>	486
Índice de materias	487



MÓDULO

1

La trigonometría

La trigonometría se basa en la semejanza de triángulos; esto es, si dos triángulos tienen sus lados proporcionales entonces sus ángulos deben ser iguales. Así que debe haber una manera de calcular los ángulos en términos de los lados. Las funciones trigonométricas son las que permiten calcular dichos ángulos.

El capítulo inicia con el estudio del triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas de los ángulos agudos. Se trabaja indistintamente con la medida de los ángulos en grados y en radianes. Posteriormente, se extienden las funciones trigonométricas para cualquier ángulo mediante el uso del círculo trigonométrico, viendo a los ángulos como el giro que realiza un punto sobre el círculo unitario.

Las identidades trigonométricas son importantes para poder resolver problemas geométricos y de cálculo, por lo que se dedica una sección a su estudio.

Por último, para lograr resolver cualquier tipo de triángulo, es decir, dados algunos de sus elementos poder encontrar todos los demás, se estudian la ley de los senos y la ley de los cosenos.

Los ángulos y su medición

Tomemos dos semirrectas OA y OB a cuyo punto en común O , lo llamaremos *vértice*. Si mantenemos fija a la semirrecta OA y hacemos girar OB desde la posición inicial OA hasta la posición final OB , diremos que generó un *ángulo* $\angle AOB$.

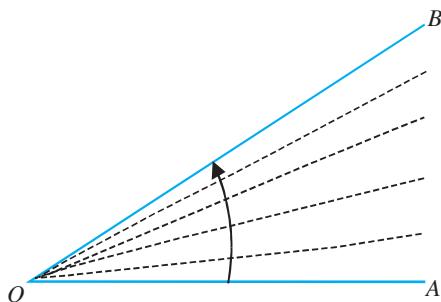


Figura 1-1

La semirrecta OA se conoce como *semirrecta inicial* y OB como *semirrecta final* o *generatriz*.

Para medir un ángulo, se debe contar primero con una unidad de medida. Parece natural considerar al ángulo recto, que es el formado por dos rectas perpendiculares; sin embargo, para fines prácticos, esta unidad es muy grande, por lo que se ha recurrido a considerar unidades más pequeñas.

Podemos dividir al ángulo recto en 90 partes iguales, llamadas *grados*. Cada grado se divide en 60 partes iguales llamadas *minutos* y cada minuto en 60 partes iguales llamadas *segundos*; ésta es la medida angular en el sistema *sexagesimal*.

Cada ángulo se determina diciendo cuántos grados, minutos y segundos mide. La notación que es común usar para grados, minutos y segundos es $^{\circ}$, $'$, $"$.

Ejemplos

1. Un ángulo recto mide 90 grados y conforme a la notación anterior se escribe 90° .
2. Cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60° .
3. Para indicar que un ángulo mide 35 grados, 21 minutos y 14 segundos, escribimos $35^{\circ} 21' 14''$.
4. Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide $25^{\circ} 25' 25''$, ¿cuánto mide el otro ángulo agudo?

Solución:

Como los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son *complementarios*, es decir, suman 90° , entonces calculamos

$$90^{\circ} - (25^{\circ} 25' 25'').$$

Para poder efectuar la resta escribimos 90° como $89^{\circ} 59' 60''$; entonces:

$$90^{\circ} - (25^{\circ} 25' 25'') = (89^{\circ} 59' 60'') - (25^{\circ} 25' 25'') = 64^{\circ} 34' 35''.$$

El otro ángulo agudo mide $64^{\circ} 34' 35''$.

Una variante de la medición de los ángulos en grados es expresar a las fracciones de grado en notación decimal, es decir, dividirlos en décimos, centésimos, milésimos...

Para convertir de la notación de minutos y segundos a la notación decimal, utilizamos la regla de tres:

$$60 \text{ minutos} \rightarrow 1 \text{ grado}$$

$$m \text{ minutos} \rightarrow g \text{ grados}$$

de donde obtenemos que $1' = \frac{1^\circ}{60} \approx 0.016667$, y la regla de tres:

$$3600 \text{ segundos} \rightarrow 1 \text{ grado}$$

$$s \text{ segundos} \rightarrow g \text{ grados}$$

de donde obtenemos que $1'' = \frac{1^\circ}{3600} \approx 0.000278$.

Ejemplos

1. Escribir $35^\circ 21' 14''$ en expresión decimal.

Solución:

Nos quedamos con los 35° y transformamos a decimales los minutos y los segundos;

$$21' = \frac{21}{60} \approx 0.35^\circ \quad \text{y} \quad 14'' = \frac{14}{3600} \approx 0.0039^\circ,$$

entonces,

$$35^\circ 21' 14'' \approx 35.3539^\circ$$

2. Escribir 32.5892° en grados, minutos y segundos.

Solución:

Nos quedamos con la parte entera y convertimos los 0.5892 grados a minutos:

$$0.5892 \text{ grados} = 0.5892 \times 60 = 35.352 \text{ minutos};$$

nos quedamos con la parte entera y convertimos los 0.352 minutos a segundos:

$$0.352 \text{ minutos} = 0.352 \times 60 = 21.12 \text{ segundos};$$

así que

$$32.5892^\circ \approx 32^\circ 35' 21''.$$

Este tipo de notación ha cobrado importancia debido a la existencia de las calculadoras de bolsillo, ya que la mayoría de ellas expresan los grados en forma decimal y no en grados, minutos y segundos y, por otro lado, es mucho más fácil hacer operaciones aritméticas con ellos.

La medida circular o en radianes

Existe otra forma de medir los ángulos que es más conveniente en ciertas áreas de las matemáticas. Por ejemplo, en el cálculo diferencial e integral. Consideremos un ángulo central AOB ; es decir, un ángulo cuyo vértice se encuentre en el origen de coordenadas; dibujamos un círculo con centro en el origen y radio r . La medida del ángulo AOB en radianes es el cociente de la longitud del arco que subtiende entre el radio del círculo,

$$\text{medida del ángulo } AOB = \frac{x}{r}.$$

Cuando la longitud del arco es igual al radio del círculo, obtenemos la unidad de medida, a la que llamamos *radian*.

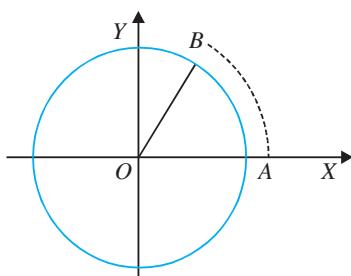


Figura 1-2

Queda la duda de si esta unidad de medida pueda depender del radio del círculo; veremos que no es así.

A un ángulo de 360° le corresponde un arco que es el perímetro del círculo ($2\pi r$), de modo que a un ángulo AOB que mide θ° le corresponde un arco que mide x unidades; es decir,

$$\frac{360}{2\pi r} = \frac{\theta}{x},$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= \frac{\theta(2\pi r)}{360} \\ \frac{x}{r} &= \frac{\pi}{180} \theta \end{aligned} \tag{1.1}$$

pero $\frac{x}{r}$ es por definición la medida en radianes del $\angle AOB$, que no depende del radio, pues de acuerdo con la igualdad anterior, coincide con la expresión $\frac{\pi}{180} \theta$ que es independiente del radio.

Observación:

En un círculo de radio 1, la longitud x del arco que subtiende un ángulo central es la medida en radianes del ángulo $(\frac{x}{1})$.

Si consideramos dos ángulos centrales AOB y COD de un círculo y consideramos sus medidas en radianes, tenemos

$$\angle AOB = \frac{\arco{AB}}{r} \quad \text{y} \quad \angle COD = \frac{\arco{CD}}{r}$$

donde r es el radio del círculo, de donde

$$\frac{\angle AOB}{\text{arco } AB} = \frac{1}{r} \quad \text{y} \quad \frac{\angle COD}{\text{arco } CD} = \frac{1}{r}.$$

Así, los ángulos centrales son proporcionales a los arcos que subtienden, es decir,

$$\frac{\angle AOB}{\text{arco } AB} = \frac{\angle COD}{\text{arco } CD}.$$

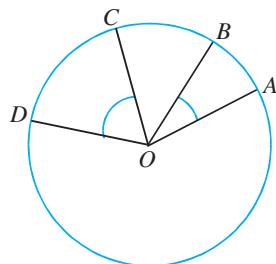


Figura 1-3

La expresión (1.1) también nos dice cómo pasar de medidas en radianes a medidas en grados y recíprocamente.

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados} \qquad 1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

Ejemplos

1. ¿Cuál es el valor en grados, de un radián?

Solución:

Como $\pi \approx 3.1416$, tenemos que

$$\frac{180}{3.1416} = 57.29$$

Entonces, al usar la primera de las igualdades anteriores se tiene que un radián equivale aproximadamente a 57.29 grados.

2. Encontrar en radianes, el valor correspondiente a 75 grados.

Solución:

$$\frac{75\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}.$$

La medida en radianes de 75 grados es $\frac{5\pi}{12}$.

3. Encontrar el valor en grados de $\frac{\pi}{3}$ radianes.

Solución:

$$\frac{\pi}{3} \frac{180}{\pi} = 60.$$

$\frac{\pi}{3}$ radianes equivalen a 60 grados.

4. Encontrar el valor en radianes de $148^\circ 36' 27''$.

Solución:

Primero escribimos $148^\circ 36' 27''$ en forma decimal.

$$36' = \frac{36}{60} = 0.6^\circ \quad \text{y} \quad 27'' = \frac{27}{3600} = 0.0075^\circ$$

Entonces

$$148^\circ 36' 27'' = 148.6075^\circ$$

de donde

$$\frac{148.6075\pi}{180} \approx 2.59$$

$148^\circ 36' 27''$ equivale, aproximadamente, a 2.59 radianes.

En la tabla siguiente aparecen algunos de los ángulos más comunes escritos en grados y radianes.

Grados:	30	45	60	90	135	180	270	360
Radianes:	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Ejercicios

Escribe en grados, minutos y segundos cada expresión decimal.

- | | | |
|---------------------|---------------------|----------------------|
| 1. 5.4267° | 2. 28.91034° | 3. 106.56° |
| 4. 239.8051° | 5. 327.1480° | 6. 175.60123° |

Escribe la expresión decimal de:

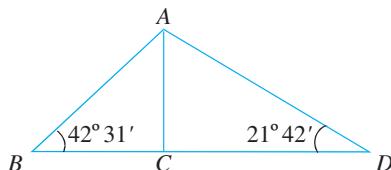
- | | | |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 7. $56^\circ 29' 8''$ | 8. $98^\circ 54' 23''$ | 9. $204^\circ 17' 32''$ |
| 10. $283^\circ 45' 16''$ | 11. $73^\circ 13' 57''$ | 12. $152^\circ 36' 59''$ |

13. ¿Cuántos minutos hay en $35^\circ 10'$?

14. ¿Cuántos segundos hay en $\frac{5}{6}\pi$ radianes?

15. Expresa en grados, minutos y segundos un millón de segundos.

16. Dos triángulos que tienen un cateto común forman un triángulo como el de la siguiente figura. Si el ángulo en B mide $42^\circ 31'$ y el ángulo D mide $21^\circ 42'$, ¿cuánto mide el ángulo $\angle DAB$?



17. ¿Cuántos segundos mide un radián?

Expresa en grados las siguientes medidas en radianes:

- | | | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 18. $\frac{\pi}{2}$ | 19. $\frac{\pi}{3}$ | 20. $\frac{\pi}{4}$ | 21. $\frac{\pi}{5}$ | 22. $\frac{\pi}{6}$ | 23. $\frac{\pi}{7}$ |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|

Expresa en radianes, en términos de π , lo siguiente:

24. 45° **27.** 36°

25. 15° **28.** 75°

26. 120° **29.** 90°

30. Encuentra la medida en grados de cada ángulo interior de

- a) un pentágono regular.
- b) un octágono regular.
- c) un decágono regular.
- d) un hexágono regular.
- e) un heptágono regular.
- f) un dodecágono regular.

Relaciones básicas de la trigonometría

¿Cuántos triángulos rectángulos pueden construirse si los catetos deben medir 5 y 12 metros, respectivamente?

Solución:

Recordemos que dos triángulos son congruentes cuando sus tres lados son congruentes.

Para contestar la pregunta, usamos el teorema de Pitágoras, que garantiza que la hipotenusa es igual a

$$\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Conocidos los tres lados, de longitudes 5, 12 y 13, hay una sola manera de construir el triángulo; cualquier otra construcción nos dará un triángulo congruente con éste.

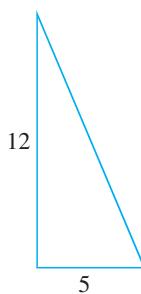
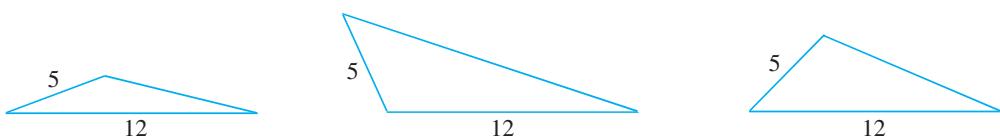


Figura 1-4

Puede construirse un único triángulo rectángulo cuyos catetos midan 5 y 12 metros.

Observación:

Si quitamos la condición de que el triángulo sea rectángulo, la solución no es única; esto es, hay una infinidad de triángulos tales que dos de sus lados miden 5 y 12 metros respectivamente.

**Figura 1-5**

La trigonometría, como su nombre lo indica, surgió de la necesidad de medir triángulos, lo cual puede ser posible utilizando las relaciones que guardan sus lados, los ángulos, las áreas, así como otros elementos geométricos. En nuestros días, el estudio de la trigonometría se extiende más allá de tales alcances y se torna importante por sus aplicaciones que van desde la ingeniería, la navegación y las ciencias, en general, hasta las artes, como la música y la arquitectura.

Algunos de los problemas que se plantearon en el origen de la trigonometría son del estilo siguiente:

¿Qué posibilidad hay de construir un triángulo con ciertas características?; o bien, conocidos algunos elementos del triángulo, ¿cómo determinar otros?

Ejemplos

1. ¿Puede construirse un triángulo rectángulo de tal manera que uno de sus ángulos mida 25° y uno de sus catetos mida 4 metros?

Solución:

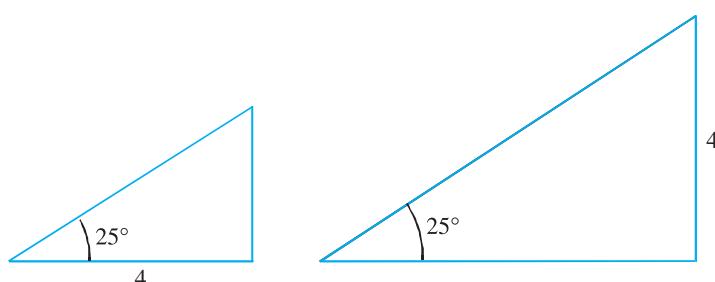
Puesto que el triángulo es rectángulo, sólo falta conocer el otro ángulo agudo; pero éste es complementario a 25° ; es decir, el tercer ángulo mide

$$90^\circ - 25^\circ = 65^\circ.$$

Los ángulos del triángulo miden

$$90^\circ, 25^\circ \text{ y } 65^\circ.$$

Con estos datos podemos encontrar triángulos no congruentes entre sí que tengan un cateto igual a 4, por lo que el triángulo no es único.

**Figura 1-6**

2. Los catetos de un triángulo rectángulo miden $\sqrt{3}$ y 1, ¿cuánto miden los ángulos del triángulo?

Solución:

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2;$$

un triángulo cuyos lados miden $\sqrt{3}$, 1, 2 es:

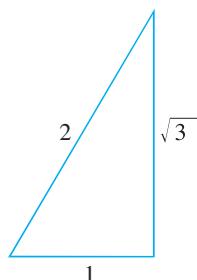


Figura 1-7

Para encontrar los ángulos, construimos otro triángulo reflejando el que ya tenemos y unimos los dos:

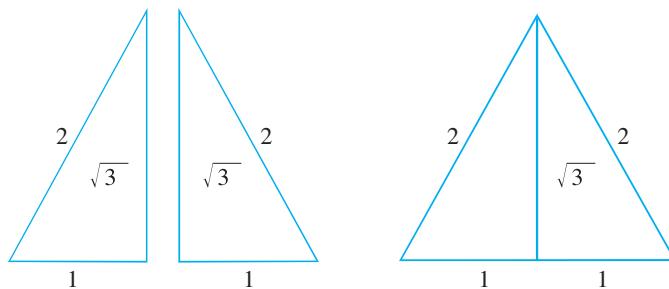


Figura 1-8

entonces, el triángulo es la mitad de un triángulo equilátero de lado 2. Como cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero mide 60° , entonces los ángulos del triángulo rectángulo miden 30° , 60° y 90° .

3. En un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30° y 60° , encontrar la longitud del cateto más largo en términos de la hipotenusa.

Solución:

Llamamos A , B y C a los vértices del triángulo, ℓ al cateto más largo y x a la hipotenusa. Reflejamos, como en el ejemplo anterior, para obtener el triángulo de la figura:

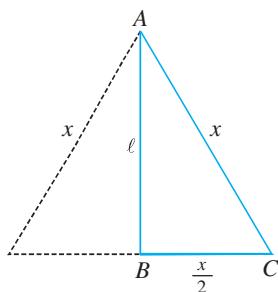


Figura 1-9

Puesto que el triángulo es equilátero, entonces la longitud del lado BC mide $\frac{x}{2}$. Usando el teorema de Pitágoras, tenemos

$$x^2 = \ell^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

despejamos ℓ :

$$\ell = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Así, la longitud del cateto más largo es $\frac{\sqrt{3}}{2}x$. Es decir, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ por la longitud de la hipotenusa.

No siempre hay argumentos geométricos tan sencillos como en los ejemplos anteriores, que nos permitan encontrar los ángulos de un triángulo cuando se conocen los lados. Las funciones trigonométricas, que definiremos en seguida, son la base para resolver, en general, problemas de este tipo.

Ejercicios

- En un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30° y 60° , encuentra el cateto mayor en términos del cateto menor.
- Encuentra la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 45° en términos de uno de los catetos.

Funciones trigonométricas para ángulos agudos

Un avión de control remoto se eleva formando un ángulo de 15° con respecto al piso. Si el avión se desploma a 35 metros del punto de partida, ¿cuál fue la altura máxima alcanzada por el avión? ¿Qué distancia recorrió en el ascenso?

Solución:

Con los datos del problema, dibujamos el esquema que aparece en la figura 1.10.